*Durée : 90 minutes. L'énoncé comporte **deux pages**.
Calculatrices, téléphones, ordinateurs et documents interdits.*

Exercice 1. (2 points) Questions de cours

- a. Énoncer la définition d'une probabilité sur un ensemble fini Ω .
- b. Énoncer le théorème de transfert sur un espace de probabilité fini.

Exercice 2. (2 points)

Un ensemble de 10 pages comprend 2 pages coloriées en rouge, 3 pages coloriées en vert et 5 pages blanches.

On considère que les pages de même couleur sont toutes indiscernables et on les range en ligne au hasard sur la table.

1. Calculer le nombre de dispositions des pages sur la table.
2. Calculer le nombre de dispositions de ces 10 pages qui alternent une page coloriée et une page blanche (sans contrainte sur la couleur de la première page).

Exercice 3. (6 points) Deux étudiants choisissent au hasard (et indépendamment) chacun un code PIN formé de 4 chiffres DISTINCTS (parmi les dix chiffres de 0 à 9 ; par exemple : 1493 et 9163).

1. Quel est l'espace des réalisations Ω et la probabilité P sur Ω correspondant à l'expérience ?
2. Quelle est la probabilité que les deux étudiants aient choisi le même code ?
3. Quelle est la probabilité que les deux codes commencent par le même chiffre ? (Exemple : 1493 et 1695.)
4. Quelle est la probabilité que les deux codes commencent et se terminent par les mêmes chiffres ? (Exemple : 1493 et 1693 ou encore 2493 et 2683.)
5. Quelle est la probabilité que les chiffres d'au moins un des codes soient tous impairs ?

Exercice 4. (5 points) Un joueur dispose d'un dé et d'une pièce. Le dé est équilibré et la pièce a une probabilité p ($0 < p < 1$) de tomber sur pile. Le joueur lance d'abord le dé, puis lance la pièce autant de fois que le résultat du dé. Il compte enfin le nombre de piles obtenu au cours des lancers. Les résultats de chaque lancer sont indépendants. On note $q = 1 - p$. On note également D la variable aléatoire correspondant à la valeur du dé et X celle correspondant au nombre de piles obtenus à la fin du jeu.

1. Soit $(i, j) \in \{1, \dots, 6\}^2$. Que vaut $P(X = j \mid D = i)$?
2. Calculer $P(X = 6)$ et $P(X = 4)$.
3. Montrer que

$$P(X = 0) = \frac{q}{6} \left(\frac{1 - q^6}{1 - q} \right).$$

4. Sachant que le joueur n'a obtenu aucun pile au cours des lancers, quelle était la probabilité que le résultat du dé était 1 ? En déduire que lorsque $p = q$, cette quantité est strictement supérieure à $\frac{1}{2}$.

Exercice 5. (5 points)

Soient X et Y deux variables aléatoires telles que la loi du couple (X, Y) est donnée par le tableau suivant :

$X \backslash Y$	0	1	2	3
1	0.1	0.2	0.1	0.1
2	0.1	0	0	0.1
3	0.1	0	0.1	0.1

1. Calculer la probabilité $P(X = Y)$.
2. Déterminer les lois de X et de Y .
3. Calculer l'espérance et la variance de X .
4. Les variables aléatoires X et Y sont-elles indépendantes ?
5. Déterminer la loi de $Z = X + Y$.