TD 2 : Ensembles de probabilité finis

Exercice 1

On considère un univers Ω et trois événements A, B et C. Décrire par des opérations ensemblistes sur A, B et C les événements E_i suivants :

1. E_1 est réalisé lorsque les trois événements A, B et C sont réalisés.
2. E_2 est réalisé lorsque aucun événement des trois événements n'est réalisé.
3. E_3 est réalisé lorsque seuls A et B sont réalisés.
4. E_4 est réalisé lorsque au moins un des trois événements est réalisé.
5. E_5 est réalisé lorsque au plus un des trois événements est réalisé.

Exercice 2

On lance deux dés. Le premier est vert et le second est bleu.

1. Écrire Ω.
2. Construire une probabilité sur Ω, c'est-à-dire, donner la probabilité $\mathbb{P}(\omega)$ pour tout $\omega \in \Omega$.
3. Soit A l'événement *le dé bleu donne un nombre exactement deux fois plus grand que le dé vert.* Décrire A puis calculer sa probabilité.
4. Soit B l'événement *le maximum des deux dés vaut 4*. Décrire B puis calculer sa probabilité.

Exercice 3

Voici deux paris soumis par le Chevalier de Méré à Pascal.

Pari 1. On jette 4 fois un dé à six faces, Méré gagne si l'on obtient au moins un 6.

Pari 2. On jette 24 fois deux dés à six faces, Méré gagne si on obtient au moins un double 6.

Méré avait fait fortune grâce au premier pari et pensait qu'il avait plus d'une chance sur deux de gagner le deuxième pari également.

1. Modéliser soigneusement la première expérience aléatoire : « on jette 4 fois un dé ». Expliciter Ω, l'ensemble des événements élémentaires, et la probabilité de chacun de ces événements élémentaires.
2. On considère l'événement A : « on n'obtient pas de 6 ». Énumérer les événements élémentaires qui constituent A.
3. Calculer la probabilité de A et conclure sur le premier pari.
4. Le chevalier de Méré avait-il raison à propos du second pari ? (Justifier.)

Exercice 4

Une urne contient des boules numérotées de 1 à 20. On tire sans remise trois boules de l'urne, en conservant l'ordre du tirage.

1. Décrire l'ensemble Ω et construire une probabilité sur Ω.
2. Quelle est la probabilité qu'au moins une boule ait un numéro supérieur ou égal à 17 ?
3. Quelle est la probabilité d'obtenir des numéros en ordre croissant ?
4. Quelle est la probabilité d'obtenir des numéros successifs en ordre croissant ?

Exercice 5

On jette deux dés non pipés, un noir et un blanc. Modéliser cette expérience aléatoire. On note A l'événement "le chiffre du dé noir est pair", B l'événement "le chiffre du dé blanc est pair", et C l'événement "les dés ont la même parité". Montrer que A et B, A et C, B et C sont indépendants. Peut-on en déduire que $P(A \cap B \cap C) = P(A)P(B)P(C)$?

Exercice 6

Soit A et B deux événements tels que $\mathbb{P}(A) = 0{,}3$ et $\mathbb{P}(A \cup B) = 0{,}5$. Trouver $\mathbb{P}(B)$ quand :

(a) A et B sont indépendants ;

(b) A et B sont incompatibles ;

(c) $\mathbb{P}(A \mid B) = 0{,}1$;

(d) $\mathbb{P}(B \mid A) = 0{,}4$.

Exercice 7

Un nouveau vaccin a été testé sur 12 500 personnes ; 75 d'entre elles, dont 35 femmes enceintes, ont eu des réactions secondaires nécessitant une hospitalisation. Parmi les 12 500 personnes testées, 680 personnes sont des femmes enceintes. On souhaite comparer les risques liés au vaccin, suivant qu'on est une femme enceinte ou non.

On peut modéliser ainsi ce problème :

— expérience aléatoire : on pioche une personne *au hasard* dans la population étudiée ;

— univers : $\Omega = [\![1, 12\,500]\!]$;

— probabilité : $\mathbb{P}$ est la probabilité uniforme sur Ω (chaque individu a la même probabilité d'être piochée) : $\mathbb{P}(\omega) = 1/12\,500$ pour tout $\omega \in \Omega$. On peut en déduire que, pour tout $A \subset \Omega$,

$$\mathbb{P}(A) = \sum_{\omega \in A} \mathbb{P}(\omega) = \frac{|A|}{12\,500}.$$

1. Quelle est la probabilité pour une femme enceinte, d'avoir une réaction secondaire si elle reçoit un vaccin ?
2. Quelle est la probabilité pour une personne non enceinte d'avoir une réaction secondaire ?

Conclure.

Exercice 8

Pour se rendre à la Doua, une étudiante a le choix entre quatre itinéraires : A, B, C et D. La probabilité qu'elle choisisse A (respectivement B, C) est $1/3$ (respectivement $1/4$, $1/12$). La probabilité d'arriver en retard en empruntant le chemin A (respectivement B, C) est $1/20$ (resp. $1/10$, $1/5$). En empruntant le chemin D elle n'est jamais en retard.

1. Proposer un ensemble fondamental Ω qui décrivent tous ces événements.
2. Écrire plusieurs systèmes complets d'événements possibles.
3. Calculer la probabilité que l'étudiante arrive en retard.
4. Un jour donné, l'étudiante est en retard. Quelle est la probabilité qu'elle ait emprunté l'itinéraire C ?