

Chapitre 1: Ensembles, dénombrement.

I Rappels sur les ensembles.

Définition: un ensemble est une collection d'objets distincts. Ces objets s'appellent les éléments de cet ensemble. L'ensemble vide est l'ensemble ne contenant aucun élément. On le note $\emptyset$.

Dans ce cours on considérera souvent un ensemble universel Ω .

Définition: on note $\mathcal{P}(\Omega)$ l'ensemble des parties (sous-ensembles) de Ω .

Ex: si $\Omega = \{1, 2, 3\}$,

$$\mathcal{P}(\Omega) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \Omega\}.$$

On définit, pour deux sous-ensembles A, B d'un ensemble Ω ,

- * $A \cup B$, l'union de A et B , l'ensemble des éléments qui sont dans A ou B
- * $A \cap B$, l'intersection de A et B , l'ensemble des éléments qui sont dans A et B
- * A' ou $\bar{A}$, le complémentaire de A dans Ω , l'ensemble des éléments de Ω qui ne sont pas dans A .
- * $A \setminus B = A \cap \bar{B}$, A privé de B , l'ensemble des éléments qui sont dans A mais pas dans B .

Proposition. Soient A, B, C des parties d'un ens. Ω et $(A_i)_{i \in \mathbb{N}}$ une suite de parties de Ω . On a les propriétés suivantes.

* Commutativité

- $A \cup B = B \cup A$
- $A \cap B = B \cap A$

* Associativité

- $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap C$
- $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup C$

On utilise les notations $\bigcup_{i=1}^n A_i = A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n$

$\bigcap_{i=1}^n A_i = A_1 \cap \dots \cap A_n$, ainsi que $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$, $\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i$

* Distributivité

- $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$
- $B \cup \left(\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i \right) = \bigcap_{i=1}^{\infty} (B \cup A_i)$
- $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
- $B \cap \left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \right) = \bigcup_{i=1}^{\infty} (B \cap A_i)$

* Passage au complémentaire

- $\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}$; $\overline{\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i} = \bigcap_{i=1}^{\infty} \bar{A}_i$
- $\overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}$; $\overline{\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i} = \bigcup_{i=1}^{\infty} \bar{A}_i$

II Cardinaux et dénombrement

Proposition. Soient n et m deux entiers - $\{1, \dots, n\}$ et $\{1, \dots, m\}$ sont en bijection si et seulement si $n = m$.

Définition. Un ensemble non vide Ω est dit fini s'il existe un entier $n \geq 1$ tel que Ω et $\{1, \dots, n\}$ sont en bijection. L'entier n est appelé cardinal de Ω et est noté $|\Omega|$ ou $\text{card}(\Omega)$.

Rq: le cardinal d'un ensemble fini est son nombre d'éléments.

Par convention $|\emptyset| = 0$.

Proposition: 1) Si A et B sont deux ensembles finis
disjoints (tels que $A \cap B = \emptyset$), alors

$$|A \cup B| = |A| + |B|.$$

2) Si $(A_i)_{i=1, \dots, n}$ sont des ensembles finis deux à deux disjoints ($A_i \cap A_j = \emptyset$ pour tous $i \neq j$), alors

$$\left| \bigcup_{i=1}^n A_i \right| = \sum_{i=1}^n |A_i|.$$

Proposition (Principe d'inclusion-exclusion)

1) Si A et B sont deux ensembles finis,

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$$

2) Soient un entier $n \geq 2$ et $(A_i)_{1 \leq i \leq n}$ des ensembles finis. On a

$$\left| \bigcup_{i=1}^n A_i \right| = \sum_{k=1}^n (-1)^{k+1} \left(\sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} |A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_k}| \right)$$

$$\begin{aligned} &= \sum_{i=1}^n |A_i| - \sum_{1 \leq i < j \leq n} |A_i \cap A_j| + \sum_{1 \leq i < j < k \leq n} |A_i \cap A_j \cap A_k| \\ &\quad - \dots + (-1)^{n+1} |A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n| \end{aligned}$$

Preuve.

1) En comptant les éléments de A d'une part et ceux de B d'autre part, les éléments de l'intersection sont comptés deux fois.

2) Pas récurrence.

La ppte est vraie pour $n=2$.

Soit $n \geq 2$. On suppose la ppte vraie au rang n .

Soient $A_1, \dots, A_{n+1}$ des ensembles fins.

$$|A_1 \cup \dots \cup A_{n+1}|$$

$$= |(A_1 \cup \dots \cup A_n) \cup A_{n+1}|$$

$$= |A_1 \cup \dots \cup A_n| + |A_{n+1}| - |(A_1 \cup \dots \cup A_n) \cap A_{n+1}|$$

$$= |A_1 \cup \dots \cup A_n| + |A_{n+1}| - |(A_1 \cap A_{n+1}) \cup \dots \cup (A_n \cap A_{n+1})|$$

$$= \sum_{i=1}^n |A_i| - \sum_{1 \leq i < j \leq n} |A_i \cap A_j| + \sum_{1 \leq i < j < k \leq n} |A_i \cap A_j \cap A_k| - \dots + (-1)^{n+1} |A_1 \cap \dots \cap A_n| + |A_{n+1}|$$

ppte
au rang n

$$- \sum_{i=1}^n |A_i \cap A_{n+1}| + \sum_{1 \leq i < j \leq n} |A_i \cap A_j \cap A_{n+1}| - \dots$$

$$- (-1)^{n+1} |A_1 \cap A_{n+1} \cap \dots \cap (A_n \cap A_{n+1})|$$

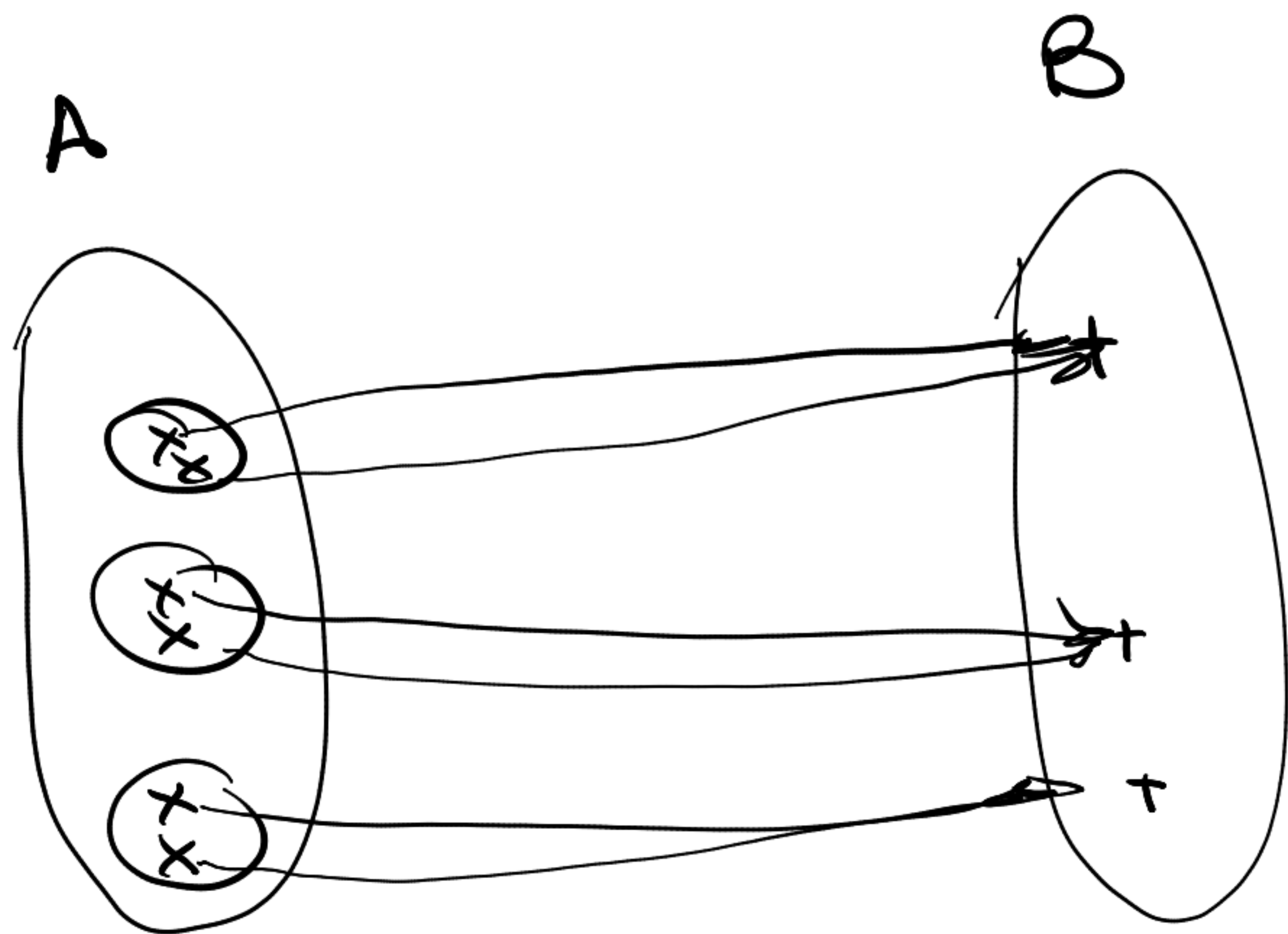
$$= \sum_{i=1}^{n+1} |A_i| - \sum_{1 \leq i < j \leq n+1} |A_i \cap A_j| + \dots + (-1)^{n+1+1} |A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_{n+1}|$$

Donc la ppte est vraie au rang $n+1$.

Le lemme suivant est utile pour calculer des cardinaux.

Lemme (principe des bergers) Etant donnés deux ensembles finis A et B et une surjection $f: A \rightarrow B$ telle que les ensembles $f^{-1}(\{y\})$ pour tout $y \in B$ ont tous le même cardinal k , alors

$$|A| = k |B|$$



Exemple : si B est un troupeau de moutons et A l'ensemble de leurs pattes, f la fonction qui à chaque patte associe son mouton, $|f^{-1}(y)| = 4$ pour tout mouton y , et

$$\begin{array}{ccc} \nearrow & |A| = 4 |B| & \nwarrow \\ \text{nbre} & & \text{nbre de moutons} \\ \text{de pattes} & & \end{array}$$

Preuve:

On a

$$A = \bigcup_{y \in B} f^{-1}(\{y\}).$$

les $f^{-1}(\{y\})$ sont deux à deux disjoints,

donc

$$|A| = \sum_{y \in B} \underbrace{|f^{-1}(\{y\})|}_{=k}$$

$$= \sum_{y \in B} k = k |B|.$$

Proposition: Si A et B sont deux ensembles finis,

$$|A \times B| = |A| \cdot |B|$$

Preuve: On considère

$$f: A \times B \rightarrow B \\ (a, b) \mapsto b$$

Pour tout $b \in B$, $f^{-1}(b) = \{(a, b) : a \in A\}$

$$\text{donc } |f^{-1}(b)| = |A|.$$

On peut donc appliquer le principe des bords.

Corollaire: Soient $n \geq 1$ un entier et A un ensemble fini.

$$\text{On a } |A^n| = \underbrace{|A \times A \times \dots \times A|}_{n \text{ fois}} = |A|^n.$$

Définition. Si Ω est un ensemble fini et $p \geq 1$, on appelle p -liste de Ω (ou p -uplet) tout élément $(x_1, \dots, x_p)$ de Ω^p .

Lemme (Principe des tiroirs). Soient Ω un ensemble fini de cardinal n et m un entier vérifiant $m > n$. Alors pour toute m -liste $(x_1, x_2, \dots, x_m) \in \Omega^m$ il existe $i \in \{1, \dots, m\}$ et $j \in \{1, \dots, m\}$ tels que $i \neq j$ et $x_i = x_j$.

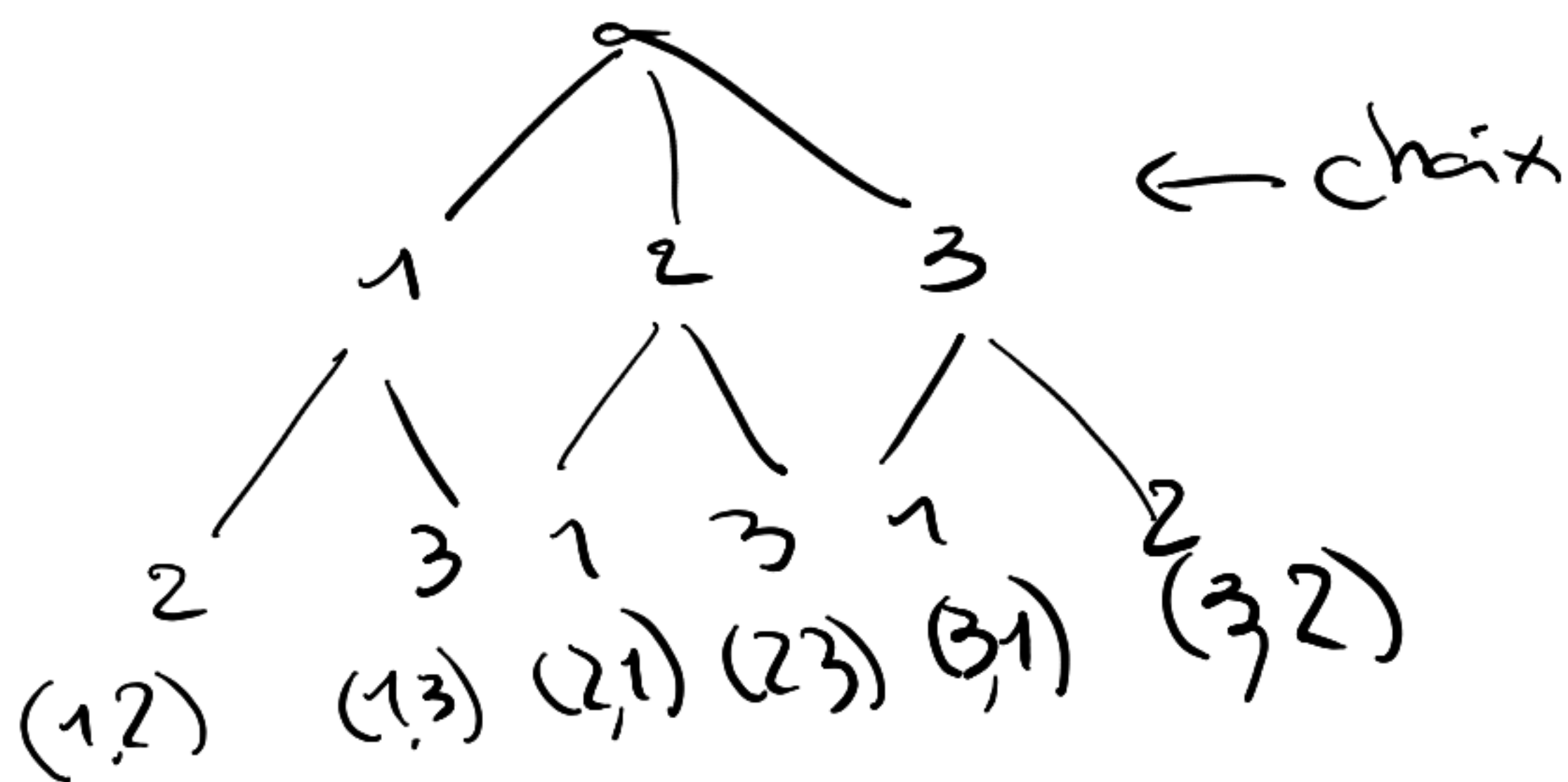
Si l'on choisit m fois un élément dans un ensemble de n éléments avec $m > n$ il y a au moins un élément que l'on a choisi plusieurs fois.

Définition : Soient Ω un ensemble fini de cardinal $n \in \mathbb{N}^*$ et $k \in \{1, 2, \dots, n\}$. On appelle arrangement de k éléments de Ω une k -liste $(x_1, \dots, x_k) \in \Omega^k$ formée d'éléments distincts, c'est-à-dire

$$\forall i \in \{1, \dots, k\}, \forall j \in \{1, \dots, k\}, i \neq j \Rightarrow x_i \neq x_j.$$

Un arrangement correspond à une manière d'ordonner k éléments distincts choisis parmi n éléments distincts.

Exemple : les arrangements de 2 éléments de $\{1, 2, 3\}$ sont $(1, 2), (1, 3), (2, 1), (2, 3), (3, 1), (3, 2)$.
 (les listes revient à considérer l'arbre suivant :

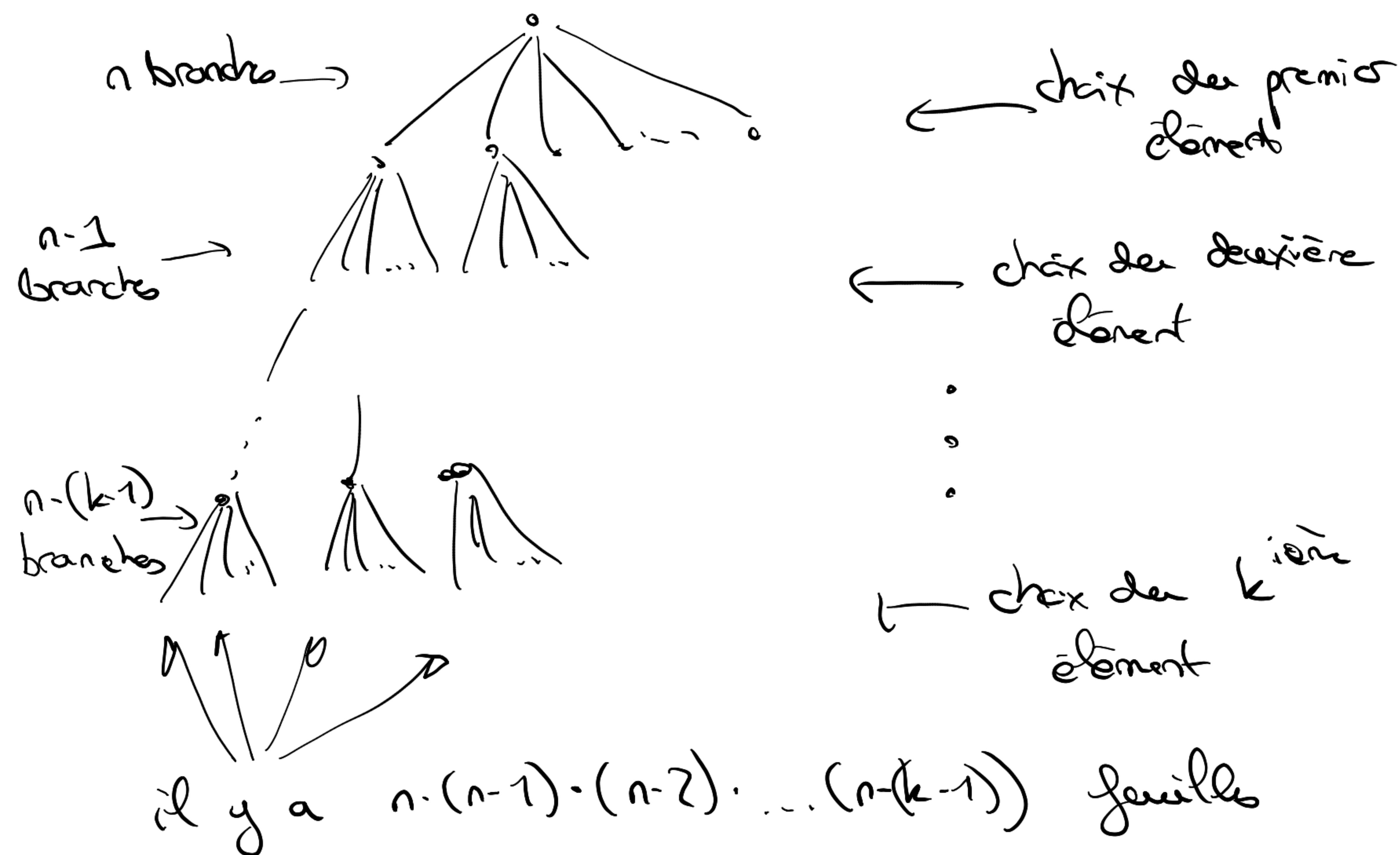


Théorème: Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $k \in \{1, 2, \dots, n\}$. Le nombre d'arrangements à k éléments d'un ensemble Ω de cardinal n est

$$A_n^k = n(n-1) \dots (n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}.$$

Preuve

Lister tous les arrangements à k éléments possibles revient à considérer un arbre



On obtient bien

$$A_n^k = n(n-1)(n-2) \dots (n-k+1)$$

↗
nbre de
possibilités pour
le choix du
1^{er} élément

↑
nbre de possibilités
pour le choix du k^{e} élément.

Définition: Soit Ω un ensemble fini de cardinal $n \in \mathbb{N}^*$. On appelle permutation de Ω un arrangement de n éléments de Ω .

Corollaire: Si $|\Omega| = n$, il y a $n!$ permutations de Ω .

Exemple: Il y a $52! \approx 8 \cdot 10^{67}$ mélanges possibles d'un jeu de cartes.

Pour comparaison, si 7 milliards de personnes mélangent chacune un paquet toutes les secondes pendant 2000 ans, on obtient environ $4,4 \cdot 10^{20}$ mélanges...

Req: l'application

f : ensemble des
permutations de Ω

$\rightarrow$

ensemble de
arrangements de k
éléments de Ω

$$(a_1, \dots, a_k, a_{k+1}, \dots, a_n) \mapsto (a_1, \dots, a_k)$$

et une surjection, et $|f^{-1}(\{(a_1, \dots, a_k)\})| = (n-k)!$

pour tout $(a_1, \dots, a_k)$, chaque élément de

$f^{-1}(\{(a_1, \dots, a_k)\})$ correspondant à une permutation
de $\Omega \setminus \{a_1, \dots, a_k\}$, et $|\Omega \setminus \{a_1, \dots, a_k\}| = n-k$.

En appliquant le lemme des bergers on

retrouve

$$A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}.$$

Définition: Soient Ω un ensemble fini de cardinal $n \in \mathbb{N}$ et $k \in \{0, 1, \dots, n\}$. On appelle combinaison à k éléments de Ω tout sous-ensemble de Ω de cardinal k .

Il s'agit d'un choix de k éléments distincts, sans tenir compte de l'ordre, parmi n éléments distincts.

Exemple: les combinaisons de deux éléments

de $\Omega = \{1, 2, 3\}$ sont:

combinaison	$\{1, 2\}$	$\{2, 3\}$	$\{1, 3\}$
arrangements correspondant	$(1, 2)$ et $(2, 1)$	$(2, 3)$ et $(3, 2)$	$(1, 3)$ et $(3, 1)$

Théorème: Soit $n \in \mathbb{N}$ et $k \in \{0, \dots, n\}$. Le nombre de combinaisons à k éléments d'un ensemble Ω à n éléments est

$$\binom{n}{k} = C_n^k = \frac{n!}{k! (n-k)!}.$$

Démonstration.

On considère l'application

$f: \begin{array}{c} \text{ensemble des} \\ \text{arrangements de } k \text{ éléments} \\ \text{de } \Omega \end{array} \rightarrow \begin{array}{c} \text{ensemble des} \\ \text{combinaisons à } k \text{ éléments} \\ \text{de } \Omega \end{array}$

$$(x_1, \dots, x_k) \mapsto \{x_1, \dots, x_k\}.$$

f est une surjection, et pour toute combinaison

$$\{x_1, \dots, x_k\} \text{ on a } |f^{-1}(\{x_1, \dots, x_k\})| = k!,$$

$f^{-1}(\{x_1, \dots, x_k\})$ étant l'ensemble des permutations de $\{x_1, \dots, x_k\}$. D'après le principe des

bergers on a

$$\binom{n}{k} = \frac{A_n^k}{k!} = \frac{n!}{k! (n-k)!}.$$

- Rq: • on appelle $\binom{n}{k}$ coefficient binomial
- $\binom{n}{0} = 1$ il y a un seul sous-ensemble de Ω à 0 éléments, l'ensemble vide.
 - on peut définir $\binom{n}{k} = 0$ si $k > n$ ou $k < 0$

Proposition:

- 1) si $n \in \mathbb{N}$ et $k \in \{0, \dots, n\}$, $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$
- 2) si $n \in \mathbb{N}^*$ et $k \in \{1, \dots, n\}$, $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}$

3) (Binôme de Newton). si $x, y \in \mathbb{C}$ et $n \in \mathbb{N}$

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k y^{n-k}$$

Conséquence du point 2): triangle de Pascal.

$n \backslash k$	0	1	2	3	4	5	6
1	1	1					
2	1	2	1				
3	1	3	3	1			
4	1	4	6	4	1		
5	1	5	10	10	5	1	
6	1	6	15	20	15	6	1

$\binom{n}{k}$

Démonstration:

1) et 2), voir TD.

3) On a

$$(x+y)^n = \underbrace{(x+y)(x+y) \dots (x+y)}_{n \text{ fois}}$$

Développer ce produit revient à écrire les n -listes de $\{x, y\}$ (il y en a 2^n).

Les n -listes ayant k "x" et $n-k$ "y" produisent le terme $x^k y^{n-k}$, et il y a $\binom{n}{k}$ n -listes de ce type

(on choisit par chaque liste k positions par où x dans l'ensemble de n positions possibles).

Définition. Soit $\Omega = \{a_1, \dots, a_m\}$ un ensemble fini de cardinal $m \geq 1$, $n_1, \dots, n_m$ des entiers et $n = n_1 + \dots + n_m$. On appelle permutation avec n_1 répétition de $a_1, \dots, n_m$ répétitions de a_m de l'ensemble Ω toute n -liste de Ω dans laquelle a_1 apparaît n_1 fois, $\dots$, a_m apparaît n_m fois.

Théorème Soient $\Omega = \{a_1, \dots, a_m\}$ un ensemble fini de cardinal $m \geq 1$, $n_1, \dots, n_m$ m entiers naturels et $n = n_1 + \dots + n_m$. L'ensemble de permutations de Ω avec n_1 répétitions de $a_1, \dots, n_m$ répétitions de a_m est de cardinal

$$\binom{n}{n_1, \dots, n_m} = \frac{n!}{n_1! \dots n_m!}.$$

$\binom{n}{n_1, \dots, n_m}$ est appelé coefficient multinomial.

Rq: si chaque élément apparaît une et une seule fois on obtient une permutation de Ω .

Définition: une anagramme d'un mot est un autre mot obtenu en réarrangeant les lettres du mot de départ.

Exemple: Il y a $3! = 6$ anagrammes de Bob:

Bob, Bbo, oBb, obB, boB, bBo,

mais seulement $\frac{3!}{2!1!} = 3$ anagrammes de BOB:

BOB, OBB, BBO.

Preuve du théorème.

Si l'on a n éléments différents $b_1, \dots, b_n$, il y a $n!$ n -listes possibles.

Soit f l'application qui remplace dans ces n -listes les éléments $b_1, \dots, b_n$ par a_1 .

f est surjective, et chaque nouvelle n -liste

a exactement $n_1!$ antécédents (le nombre de permutations de $\{b_1, \dots, b_{n_1}\}$)

Par le principe des bergers, il y a $\frac{n!}{n_1!}$ n-listes possibles après avoir remplacé $b_1, \dots, b_{n_1}$ par a_1 .

De même, on remplace les n_2 b_i suivants, $b_{n_1+1}, \dots, b_{n_1+n_2}$, par a_2 . Le nombre de n-listes restantes est $\frac{n! / n_1!}{n_2!} = \frac{n!}{n_1! n_2!}$. Et ainsi de suite.

Rq : à chaque combinaison à k éléments de $\{1, \dots, n\}$ on peut associer une n-liste constituée de k "o" (un "o" en position i signifie que i est un élément de la combinaison) et $n-k$ "n".

On retrouve l'égalité

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k! (n-k)!}$$

Théorème: (formule multinomiale). Soient $n \in \mathbb{N}$, $m \in \mathbb{N}^*$ et $(x_1, \dots, x_m) \in \mathbb{C}^m$. On a

$$(x_1 + \dots + x_m)^n = \sum_{n_1 + \dots + n_m = n} \binom{n}{n_1, \dots, n_m} x_1^{n_1} x_2^{n_2} \dots x_m^{n_m}.$$

Preuve.

On a

$$(x_1 + \dots + x_m)^n = \overset{\textcircled{1}}{(x_1 + \dots + x_m)} \cdot \overset{\textcircled{2}}{\dots} (x_1 + \dots + x_m)$$

En développant on obtient des n -listes formées d'éléments de $\{x_1, \dots, x_m\}$.

Le terme $x_1^{n_1} \dots x_m^{n_m}$ est produit par les n -listes ayant n_1 fois l'élément $x_1, \dots,$

n_m fois l'élément x_m . Il y a exactement

$\binom{n}{n_1, \dots, n_m}$ n -listes de ce type.

III Tirages.

On dispose de n objets distincts (p. ex. n boules numérotées de 1 à n). On peut effectuer différents types de tirages.

1) Tirage avec remise, en conservant l'ordre.

On pioche une boule, on note son numéro, on la remet dans l'urne avant de piocher la suivante, jusqu'à avoir tiré r boules.

L'ensemble des tirages possibles est $\Omega = \{1, \dots, n\}^r$; il y a n^r tirages possibles.

Exemple: on lance 10 fois un dé à 6 faces.

$$\Omega = \{1, 2, \dots, 6\}^{10}, \quad |\Omega| = 6^{10} = 60\,466\,176.$$

2) Tirage sans remise, en conservant l'ordre

On tire r boules mais sans remise ($r \leq n$) : on ne replace pas la boule dans l'urne avant de tirer la suivante. L'ensemble Ω des tirages possibles est l'ensemble des arrangements de r éléments de $\{1, \dots, n\}$, et donc

$$|\Omega| = A_n^r = n \cdot (n-1) \cdot \dots \cdot (n-r+1).$$

Exemple : pour une course de 100 m avec 8 concurrents il y a $A_8^3 = 8 \cdot 7 \cdot 6 = 336$ podiums possibles.

3) Tirage sans remise, sans conserver l'ordre

On tire r boules ($r \leq n$) sans remise sans faire attention à l'ordre dans lequel elles ont été tirées.

Cette fois Ω est l'ensemble des combinaisons à r éléments de $\{1, \dots, n\}$, et $|\Omega| = \binom{n}{r}$.

Exemple: on choisit une main de cinq cartes dans un jeu de 52 cartes.

Il y a $\binom{52}{5} = 2\,598\,960$ choix possibles.

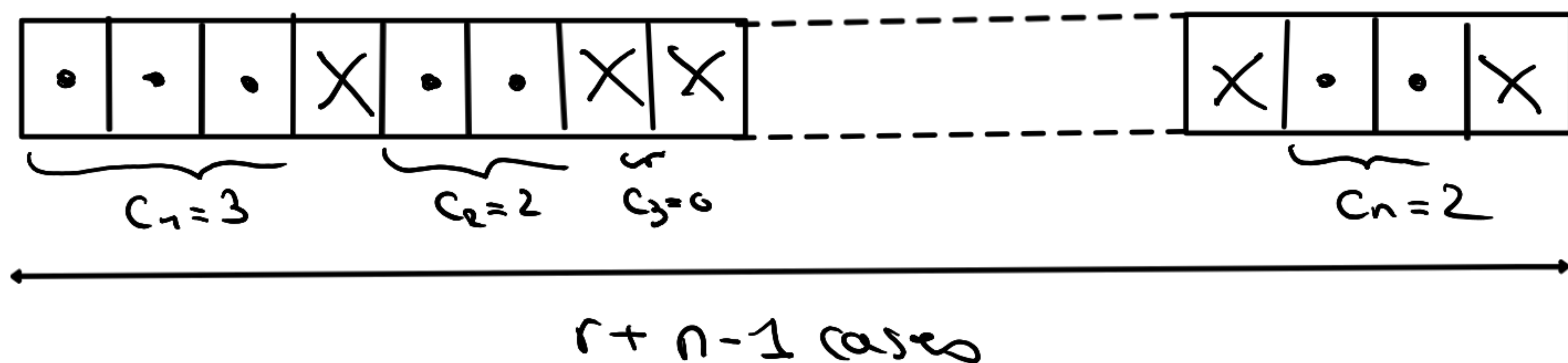
4) Tirage avec remise, sans conserver l'ordre.

On tire r boules avec remise (chaque boule peut être tirée plusieurs fois), sans conserver l'ordre. L'ensemble des tirages possibles Ω est

$$\Omega = \left\{ (c_1, \dots, c_n) : \begin{array}{l} c_i \in \mathbb{N} \text{ pour tout } i \in \{1, \dots, n\} \\ \text{et } c_1 + \dots + c_n = r \end{array} \right\}.$$

c_i : nbre de fois que la boule $n \equiv i$ est tirée.

Chaque tirage peut être représenté comme suit:



Il y a donc $\binom{r+n-1}{r}$ tirages possibles (nombre de placements possibles de $r \cdot$ dans les $r+n-1$ cases).

Exemple: un producteur de bonbons produit des sachets contenant 10 bonbons, choisis parmi trois sortes possibles.

Il y a $\binom{10+3-1}{10} = 66$ sachets différents possibles.