CONTRÔLE CONTINU

17 mars 2025

Durée : 90 minutes. L'énoncé comporte une page.
Calculatrices, téléphones, ordinateurs et documents interdits.

Exercice 1 (Question de cours, 3 points)**.**

1. Énoncer la formule de Bayes.
2. Donner la définition de l'espérance et de la variance d'une variable aléatoire X.
3. Soit X une variable aléatoire. Démontrer que $\mathrm{Var}(aX+b) = a^2 \mathrm{Var}(X)$.

Exercice 2 (3 points)**.** Vingt sportifs participent à une course. Les participants arrivés premier, deuxième et troisième constituent le podium (il n'y a pas d'ex-æquo).

1. Combien y-a-t-il de podiums possibles ?
2. Pour un participant donné, combien y-a-t-il de podiums dont il peut faire partie ?
3. Les trois participants arrivés en premier reçoivent une récompense identique. Combien y-a-t-il de distributions de récompenses possibles ?

Exercice 3 (4 points)**.** On jette deux dés équilibrés. On considère les événements suivants :

$$\begin{aligned} A &= \text{obtenir un chiffre impair sur le premier dé,} \\ B &= \text{obtenir un chiffre pair sur le deuxième dé,} \\ C &= \text{la somme des deux chiffres est un chiffre impair.} \end{aligned}$$

1. Décrire la situation avec un ensemble fondamental Ω et donner la probabilité des événements élémentaires : $\mathbb{P}(\{\omega\})$ pour tout $\omega \in \Omega$.
2. Est-ce que les événements A et B sont indépendants ?
3. Est-ce que les événements A et C sont indépendants ?
4. Est-ce que les événements A, B et C sont mutuellement indépendants ?

Exercice 4 (4 points)**.** On considère le jet de deux dés indépendants. Soit X la variable aléatoire représentant le nombre sur le dé ayant la plus grande valeur, et soit Y le nombre de 5 ou de 6 obtenus. Il est facile de vérifier que les lois de X et Y sont données par

k	1	2	3	4	5	6
$\mathbb{P}(X=k)$	$\frac{1}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{7}{36}$	$\frac{9}{36}$	$\frac{11}{36}$

et

k	0	1	2
$\mathbb{P}(Y=k)$	$\frac{16}{36}$	$\frac{16}{36}$	$\frac{4}{36}$

1. Calculer la loi conjointe de X et Y. (On pourra donner le résultat sous forme d'un tableau.)
2. Les variables X et Y sont-elles indépendantes ?
3. Calculer la loi de X sachant $Y=1$, c'est-à-dire calculer $\mathbb{P}(X=k \mid Y=1)$ pour $k=1,\dots,6$.
4. Calculer $\mathrm{cov}(X,Y)$.

Exercice 5 (6 points)**.** Soit X une variable aléatoire dont la loi est donnée par $\mathbb{P}(X=i) = c(1-p)^i$ pour $i=0,1,2,\dots$ et $0<p<1$.

1. Montrer que $c=p$.
2. Calculer $\mathbb{P}(X=0)$.
3. Calculer $\mathbb{P}(X>2)$.
4. Montrer que $\mathbb{P}(X>m+n|X\geq n) = \mathbb{P}(X>m)$ pour m,n entiers.
   Indication : On pourra utiliser le fait que $1+u+u^2+\cdots+u^n = \frac{1-u^{n+1}}{1-u}$ si $u\neq 1$.