TD 1 : Dénombrement

Nous manipulerons des ensembles. Rappelons les règles de base : pour tous ensembles A, B et C,
— distributivité : $(A\cup B)\cap C=(A\cap C)\cup(B\cap C)$, $A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$;
— complémentaire : $\overline{(A\cup B)}=\overline{A}\cap\overline{B}$, $\overline{(A\cap B)}=\overline{A}\cup\overline{B}$
(ici, on suppose que A, B et C sont des parties d'un même ensemble E et $\overline{A}=E\setminus A$ désigne le complémentaire de A, etc.).

Plus généralement, pour toute famille d'ensembles $(A_i)_{i\in\mathbb{N}}$ et tout ensemble B, on a :

$$\Big(\bigcup_{i\in\mathbb{N}}A_i\Big)\cap B=\bigcup_{i\in\mathbb{N}}(A_i\cap B),\qquad \Big(\bigcap_{i\in\mathbb{N}}A_i\Big)\cup B=\bigcap_{i\in\mathbb{N}}(A_i\cup B),$$

$$\overline{\Big(\bigcup_{i\in\mathbb{N}}A_i\Big)}=\bigcap_{i\in\mathbb{N}}\overline{A_i},\qquad \overline{\Big(\bigcap_{i\in\mathbb{N}}A_i\Big)}=\bigcup_{i\in\mathbb{N}}\overline{A_i}$$

(où les A_i sont supposés être des parties d'un ensemble E et la barre désigne le complémentaire dans E).

Exercice 1

Soit $\Omega=\{a,b,c\}$ (avec a,b et c distincts). Donner :

1. l'ensemble $\mathscr{P}(\Omega)$ des parties de Ω ;
2. l'ensemble des arrangements de Ω ;
3. l'ensemble des permutations de Ω ;
4. l'ensemble des combinaisons de Ω ;
5. l'ensemble 4-listes de Ω où a apparaît 2 fois, b apparaît 1 fois et c apparaît 1 fois.

Exercice 2

1. Les dix touches numériques d'un téléphone permettent de composer le code PIN, formé de quatre chiffres. Écrire l'ensemble de tous les codes que l'on peut former. Combien de codes différents peut-on former ?
2. Le mot de passe d'un ordinateur est composé de six lettres minuscules (on utilise l'alphabet latin sans accent qui contient 26 lettres). Écrire l'ensemble de tous les mots de passe différents. Quel est son cardinal ?

Exercice 3

L'équipe de football d'un grand club européen compte 2 Algériens, 1 Espagnol, 2 Français, 4 Italiens et 2 Ivoiriens. En supposant que la feuille de match, numérotée de 1 à 11, ne mentionne que les nationalités des joueurs, donner le nombre de feuilles de match possibles.

Exercice 4

Combien y a-t-il d'anagrammes du mot ETRENNE ? Même question avec le mot ENTENTE.

Exercice 5

Le clavier de neuf touches dessiné ci-dessous permet de composer le code d'entrée d'un immeuble, à l'aide d'une lettre suivie d'un nombre de trois chiffres distincts ou non.

$$\begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ a & b & c \end{array}$$

Pour chacune des questions suivantes, précisez l'ensemble considéré.

1. Combien de codes différents peut-on former ?
2. Combien y a-t-il de codes sans le chiffre 1 ?
3. Combien y a-t-il de codes comportant au moins une fois le chiffre 1 ?
4. Combien y a-t-il de codes comportant des chiffres distincts ?

Exercice 6

1. On répartit p serviettes dans n tiroirs numérotés de 1 à n. Calculer le nombre de ces répartitions selon que l'on considère :
   (a) que les serviettes sont toutes discernables ;
   (b) que les serviettes sont toutes identiques.
2. Quinze personnes entrent dans une salle où il y a 21 chaises. Combien y a-t-il de façons d'asseoir ces 15 personnes ?
3. On considère un groupe de 20 personnes. Si chaque personne sert la main de toutes les autres, combien y a-t-il de poignées de main ?
4. Un fabriquant de bonbons produit des sachets contenant 10 bonbons, choisis parmi 3 sortes possibles (fraise, framboise et citron). Combien de sachets différents peut-il proposer ?

Exercice 7

On dispose d'un jeu de 32 cartes. Combien peut-on former de mains de 5 cartes

1. ne contenant pas la dame de pique ?
2. contenant la dame de pique ?
3. contenant au moins une dame
4. contenant au plus une dame ?
5. contenant exactement deux dames ?
6. contenant exactement deux dames ou exactement deux piques.

Exercice 8

Quatre moutons et deux loups s'assoient sur un banc. Pour chaque question, on calculera le nombre de dispositions en distinguant les animaux par leur prénom (ex. : Benta, Billy, Dolly, Cupcake ; Alpha, Totem) et en ne conservant que l'information de leur espèce (ex. : L-M-M-L-M-M).

1. Quel est le nombre de dispositions possibles ?
2. Même question si les moutons sont d'un coté et les loups de l'autre.
3. Même question si chaque loup est intercalé entre deux moutons.
4. Même question si les loups veulent rester l'un à côté de l'autre.

Exercice 9

1. Montrer que, pour tous entiers positifs n et k avec $k \leq n$ (en faisant un calcul et en utilisant un raisonnement de *dénombrement*),
$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}.$$
2. Étant donnés deux entiers positifs n et k avec $k \leq n-1$, montrer la relation du triangle de Pascal :
$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}.$$
(mener le calcul d'une part, raisonner *dénombrement* d'autre part)
3. Pour $k \leq n$, montrer la relation d'absorption :
$$k\binom{n}{k} = n\binom{n-1}{k-1}.$$
En déduire la valeur de
$$\sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k}.$$

Exercice 10

1. Montrer que pour tout entier naturel non nul n,
$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}(-1)^k = 0.$$
2. Montrer l'identité de Vandermonde : pour $m, n \geq 1$ et $0 \leq k \leq m+n$,
$$\sum_{j=0}^{k} \binom{m}{j}\binom{n}{k-j} = \binom{n+m}{k}$$
Deux méthodes : développer de deux façons $(1+t)^m(1+t)^n$, ou raisonner *dénombrement.*
3. Étant donnés deux entiers $n \geq 1$ et $0 \leq k \leq n$, montrer que
$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 = \binom{2n}{n}.$$

Exercice 11

Soient n et m deux entiers satisfaisant $1 \leq n \leq m$.

1. Combien y a-t-il d'applications de $\{1, \ldots, n\}$ dans $\{1, \ldots, m\}$?
2. Combien y a-t-il d'injections de $\{1, 2, \ldots, n\}$ dans $\{1, 2, \ldots, m\}$?
3. Combien y a-t-il de bijections de $\{1, 2, \ldots, n\}$ dans $\{1, 2, \ldots, n\}$?
4. (a) Déterminer, pour tout $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$, le cardinal de l'ensemble A_i des applications de $\{1, 2, \ldots, m\}$ dans $\{1, 2, \ldots, n\}$ pour lesquelles i n'a pas d'antécédent.

   (b) Combien y a-t-il de surjections de $\{1, 2, \ldots, m\}$ dans $\{1, 2, \ldots, n\}$? *Indication : utiliser le principe d'inclusion-exclusion.*