

Chapitre 2 : Probabilités finies.

I Ensemble des possibles et événements

On appelle expérience aléatoire un phénomène dont on ne connaît pas l'issue avec certitude, mais dont on connaît l'ensemble des possibles.

Cet ensemble, noté Ω , est appelé univers ou ensemble fondamental ou ensemble des possibles.

Exemples:

* un lancer de dé. $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

* nbre de connexions au serveur de Lyon 1 sur une journée. $\Omega = \mathbb{N}$

* tps d'attente à une caisse du supermarché
 $\Omega = \mathbb{R}_+$.

* cours d'une action $\Omega = C(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$

On suppose dans ce chapitre que Ω est fini.

Définition. Etant donné un univers fini Ω , on appelle événement tout sous-ensemble de Ω .
L'ensemble des événements est donc $\mathcal{P}(\Omega)$.

Pour désigner les événements on utilise traditionnellement les lettres capitales de début de l'alphabet.

Exemple. On lance un dé. $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.
L'événement A décrit par la phrase "on obtient un chiffre pair" est $A = \{2, 4, 6\}$.

Définition. On appelle événement élémentaire tout singleton $\{\omega\}$, où $\omega \in \Omega$ est un résultat possible de l'expérience.

Le langage ensembliste permet de décrire les observations de l'expérience aléatoire.

Observations

Résultat possible

Événement

Événement certain

Événement impossible

L'événement A implique
l'événement B

A est réalisé ou B est
réalisé

A est réalisé et B est
réalisé

A n'est pas réalisé

A et B sont incompatibles

Termes ensemblistes

ω ($\omega \in \Omega$)

A ($A \subset \Omega$)

Ω

$\emptyset$

$A \subset B$

$A \cup B$

$A \cap B$

A^c

$A \cap B = \emptyset$

II Probabilité.

Définition. Étant donné un univers fini Ω on appelle probabilité sur Ω toute application

$$\begin{aligned} P : \mathcal{P}(\Omega) &\longrightarrow [0,1] \\ A &\longmapsto P(A) \end{aligned}$$

vérifiant

* $P(\Omega) = 1$

* pour tous événements A, B incompatibles
(tels que $A \cap B = \emptyset$),

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B).$$

On appelle le couple (Ω, P) espace de probabilité.

Proposition 1) Soit (Ω, P) est un espace de probabilité, pour tout événement A on a

$$P(A) = \sum_{\omega \in A} P(\{\omega\}).$$

P est entièrement définie par la famille des poids

$(p_\omega = P(\{\omega\}))_{\omega \in \Omega}$, qui vérifie

$$p_\omega \geq 0 \quad \forall \omega \in \Omega \quad \text{et} \quad \sum_{\omega \in \Omega} p_\omega = 1. \quad (*)$$

2) Réciproquement, toute famille de poids positifs $(p_\omega)_{\omega \in \Omega}$ de somme égale à 1 définit une probabilité P sur Ω par la formule, pour tout événement A ,

$$P(A) = \sum_{\omega \in A} p_\omega.$$

Preuve.

1) Soit A un événement, avec $|A| = k$ où $k \in \{1, \dots, n\}$.
Notons $\omega_1, \dots, \omega_k$ les éléments de A .

$$\begin{aligned} \text{Alors } P(A) &= P(\{\omega_1, \dots, \omega_k\}) \\ &= P(\underbrace{\{\omega_1, \dots, \omega_{k-1}\}}_{\text{événements incompatibles}} \cup \underbrace{\{\omega_k\}}_{\text{événements incompatibles}}) \\ &= P(\{\omega_1, \dots, \omega_{k-1}\}) + P(\{\omega_k\}). \end{aligned}$$

Par un raisonnement par récurrence, on obtient

$$\begin{aligned} P(A) &= P(\{\omega_1\}) + \dots + P(\{\omega_k\}) \\ &= \sum_{\omega \in A} p_\omega. \end{aligned}$$

Pas de définition de P on a bien $p_\omega \in [0, 1]$, et

$$\sum_{\omega \in \Omega} p_\omega = P(\Omega) = 1.$$

2) L'application $P: \mathcal{F}(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$ est bien

$$A \mapsto \sum_{\omega \in A} p_\omega$$

à valeurs dans $[0, 1]$, vérifie $P(\Omega) = \sum_{\omega \in \Omega} p_\omega = 1$

et si A et B sont incompatibles,

$$P(A \cup B) = \sum_{\omega \in A \cup B} p_\omega$$

$$= \sum_{\omega \in A} p_\omega + \sum_{\omega \in B} p_\omega$$

$$A \cap B = \emptyset$$

$$= P(A) + P(B).$$

Exemple: * on tire une pièce équilibrée.

$$\Omega = \{p, g\}, \quad P_p = P_g = \frac{1}{2}.$$

* Sur $\Omega = \{0, 1, 2, \dots, n\}$ avec $n \geq 1$ on peut définir par tout $p \in [0, 1]$ une probabilité à l'aide des poids $(p_k = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k})_{k \in \{0, 1, \dots, n\}}$ appelée loi binomiale.

Définition: si Ω est un univers fini on appelle probabilité uniforme sur Ω la probabilité P définie par

$$P : \mathcal{P}(\Omega) \rightarrow [0, 1] \\ A \mapsto \frac{|A|}{|\Omega|}$$

Elle est associée à la famille de poids

$$(p_\omega = \frac{1}{|\Omega|})_{\omega \in \Omega}.$$

Exemple. On lance 2 fois un dé équilibré $\Omega = \{1, 2, \dots, 6\}^2$, P probabilité uniforme sur Ω .

A : "le résultat du deuxième lancer est 4".

$$A = \{1, 2, \dots, 6\} \times \{4\}. \quad P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}.$$

III Calculs de probabilité.

Proposition : Soient $(\Omega, \mathbb{P})$ un espace de probabilité fini et A, B des événements. On a les égalités suivantes.

$$1) \quad \mathbb{P}(A^c) = 1 - \mathbb{P}(A)$$

$$2) \quad \text{Si } B \subset A, \quad \mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(A) - \mathbb{P}(A \setminus B)$$

$$3) \quad \mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)$$

Preuve.

$$1) \quad \text{Comme } \Omega = A \cup A^c \text{ et } A \cap A^c = \emptyset,$$

$$1 = \mathbb{P}(\Omega) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(A^c).$$

$$2) \quad \text{Même idée, } A = B \cup (A \setminus B) \text{ et } B \cap (A \setminus B) = \emptyset$$

ce qui implique $\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(A \setminus B)$.

$$3) \quad \text{On a } A \cup B = A \cup (B \setminus (A \cap B))$$

$$\text{et } A \cap (B \setminus (A \cap B)) = \emptyset, \text{ donc}$$

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(A \cup B) &= \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B \setminus (A \cap B)) \\ &\stackrel{2)}{=} \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B). \end{aligned}$$