TD 0 : échauffement

Pour commencer, nous vous présentons trois sommes à connaître :

— somme des premiers entiers : pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\sum_{k=1}^{n} k = 1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2} ;$$

— somme géométrique : pour tout q réel différent de 0 et de 1, et tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{k=0}^{n} q^k = 1 + q + q^2 + \cdots + q^n = \frac{1 - q^{n+1}}{1-q} ;$$

— binôme de Newton : pour tous réels a et b, et tout $n \in \mathbb{N}$

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k \, b^{n-k}.$$

Exercice 1

Soit $x_1 = 2$, $x_2 = 5$, $x_3 = 3$, $x_4 = 4$. Calculer les valeurs de

$$\sum_{i=1}^{4} x_i, \qquad \sum_{i=1}^{4} 6, \qquad \sum_{i=1}^{4} 2x_i, \qquad \sum_{i=1}^{4} (x_i - 3), \qquad \sum_{i=1}^{4} x_i^2, \qquad \sum_{i=1}^{4} (x_i - 3)^2.$$

Exercice 2

On fixe un entier n ainsi que des réels $a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_n$ et λ. Parmi les expressions suivantes, lesquelles sont vraies ?

(a) $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} (\lambda + a_i) = \lambda + \sum_{i=1}^{n} a_i$;

(b) $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} (a_i + b_i) = \sum_{i=1}^{n} a_i + \sum_{i=1}^{n} b_i$;

(c) $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \lambda a_i = \lambda \sum_{i=1}^{n} a_i$;

(d) $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} (a_i b_i) = \sum_{i=1}^{n} a_i \times \sum_{i=1}^{n} b_i$;

(e) $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} (a_i b_i) = \sum_{i=1}^{n} \Big[a_i \sum_{i=1}^{n} b_i \Big]$.

Exercice 3

Soit n un entier supérieur ou égal à 2. Parmi les expressions suivantes, lesquelles sont égales à n ? Lesquelles sont différentes et pourquoi ?

$$\sum_{k=0}^{n} 1, \qquad \sum_{k=1}^{n-1} 1, \qquad \sum_{k=1}^{n} \frac{2k}{n}, \qquad \sum_{k=0}^{n-1} \frac{2k}{n-1}, \qquad \sum_{k=1}^{n} k - \sum_{h=0}^{n-1} h, \qquad \sum_{k=n}^{n} 1, \qquad \sum_{k=n}^{n} k.$$

Exercice 4

1. Démontrer la relation donnant la somme géométrique présentée ci-dessus de deux manières : par récurrence, puis en multipliant la somme par $(1-q)$.
2. En déduire la factorisation de $a^n - b^n$, où n est un entier et a et b deux réels.
   On pourra supposer que $a \neq 0$ et introduire $q = b/a$.
3. Démontrer la relation donnant la somme S_n des premiers entiers présentée ci-dessus de trois manières :
   (a) par récurrence ;
   (b) compléter : $2S_n = S_n + S_n = \sum_{i=1}^{n} i + \sum_{j=1}^{n} j \overset{k=n+1-j}{=} \sum_{i=1}^{n} i + \sum_{k=\cdots}^{\cdots} \cdots$; interpréter graphiquement ;
   (c) développer $(k+1)^2 - k^2$ pour $k \in \{1, \ldots, n\}$ et sommer les relations obtenues.
4. (a) En utilisant à nouveau ce dernier procédé à partir de $(k+1)^3 - k^3$, calculer la somme des premiers carrés, c'est-à-dire, pour tout $n \in \mathbb{N}^2$,
   $$\sum_{k=0}^{n} k^2.$$
   (b) (Réservé aux *aficionados.*) On note T l'ensemble des couples (i,j) de $\mathbb{N}^2$ tels que
   $$1 \leq j \leq i \leq n.$$
      i. Faire quelques dessins ($n = 1$, $n = 2$, $n = 3$, n « grand »).
      ii. Montrer que l'application
      $$\begin{array}{rccc} f: & T & \longrightarrow & T \\ & (i,j) & \longmapsto & (n+1-j, i-j+1) \end{array}$$
      est bien définie. Calculer $f \circ f \circ f$ et en déduire que f est une bijection.
      iii. En remarquant que l'on a $\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{i} i = \sum_{(i,j) \in T} i$ et en utilisant f, calculer à nouveau $\sum_{i=1}^{n} i^2$.

Exercice 5

Soient les ensembles

$$A = \{1, 2, 5\},\ B = \{\{1, 2\}, 5\},\ C = \{\{1, 2, 5\}\},\ D = \{\emptyset, 1, 2, 5\},$$

$$E = \{5, 1, 2\},\ F = \{\{1, 2\}, \{5\}\},\ G = \{\{1, 2\}, \{5\}, 5\},\ H = \{5, \{1\}, \{2\}\}$$

1. Quelles sont les relations d'égalité ou d'inclusion existant entre ces ensembles ?
2. Donner le nombre d'éléments de chaque ensemble.
3. Déterminer $A \cap B$, $G \cup H$, $E \backslash G$.