

Durée : 120 minutes. L'énoncé comporte **deux pages**. Le barème est indicatif.

Calculatrices, téléphones, ordinateurs et documents interdits.

Chaque réponse doit être soigneusement justifiée.

Exercice 1. (5 points)

1. On considère n événements X_1, \dots, X_{n-1} et X_n ($n \geq 2$) dans un espace probabilisé fini (Ω, \mathbb{P}) .
 - (a) Rappeler la définition de l'indépendance deux à deux de ces n événements.
 - (b) Rappeler la définition de l'indépendance mutuelle de ces n événements.
2. On lance 2 fois une pièce de monnaie équilibrée et considère les événements suivants :

$A = \text{« On obtient Pile au 1er lancer »},$

$B = \text{« On obtient Face au 2ème lancer »},$

$C = \text{« On obtient le même résultat aux 1er et 2ème lancers »}.$

- (a) Modéliser cette expérience aléatoire par un espace probabilisé fini (Ω, \mathbb{P}) .
- (b) Est-ce que A , B et C sont deux à deux indépendants ?
- (c) Est-ce que A , B et C sont mutuellement indépendants ?

Exercice 2. (5 points) Soit B_n le nombre de partitions d'un ensemble à n éléments avec $B_0 = 1$. On appelle B_n le n -ième nombre de Bell.

- (a) Donner toutes les partitions de l'ensemble $\{1, 2, 3\}$.
- (b) Montrer que les nombres de Bell B_n satisfont la relation de récurrence :

$$B_{n+1} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} B_k \quad (n \geq 0).$$

- (c) Soit X une variable aléatoire qui suit la loi de Poisson de paramètre 1. Pour tout $n \geq 1$, soit $b_n = \mathbb{E}[X^n]$ le moment d'ordre n de X . Soit $b_0 = 1$. Démontrer que

$$b_{n+1} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} b_k.$$

- (d) En déduire la formule de Dobinski :

$$B_n = \frac{1}{e} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{k^n}{k!} \quad (n \geq 1).$$

Exercice 3. (5 points) Soient r et v deux entiers strictement positifs. On dispose d'une urne contenant r boules rouges et v boules vertes. On pioche successivement, sans remise, des boules dans l'urne jusqu'à épuisement du stock. On note à chaque étape la couleur de la boule piochée. Pour tout n compris entre 1 et $r + v$, on note :

- R_n , l'événement « la n -ième boule piochée est rouge »,
- V_n , l'événement « la n -ième boule piochée est verte ».

- (a) Modéliser cette expérience par un espace probabilisé fini (Ω, \mathbb{P}) . Calculer $|\Omega|$.
- (b) Établir une bijection de R_1 à R_n .
- (c) Calculer $|R_n|$.
- (d) En déduire $\mathbb{P}(R_n)$ et $\mathbb{P}(V_n)$.

Exercice 4. (5 points) Une enquête marketing a pour but de vérifier si les cibles potentielles seraient tentées par un nouveau produit. Il a été montré que 56% des gens sont favorables au nouveau produit. Pour aller plus loin, on interroge à nouveau 200 personnes.

- (a) Quelle est la loi du nombre de clients potentiels X parmi les 200 ?
- (b) Par quelle loi peut-on l'approcher ?
- (c) Calculer $\mathbb{P}[X > 100]$ et $\mathbb{P}[100 \leq X \leq 150]$ à 10^{-2} près. On rappelle quelques valeurs de racines carrées :

$$\sqrt{49,14} = 7,01, \quad \sqrt{49,21} = 7,015, \quad \sqrt{49,28} = 7,02.$$

- (d) On souhaite maintenant demander des précisions à un grand nombre de personnes favorables au produit, mettons 100 personnes. Proposer une taille n de l'échantillon de personnes à interroger pour que notre échantillon contienne au moins 100 personnes favorables, avec une probabilité supérieure ou égale à 95%.
-

FONCTION DE RÉPARTITION DE LA LOI NORMALE STANDARD

$$\Phi(z) = \int_{-\infty}^z \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2} dx$$

z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3.0	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990
3.1	0.9990	0.9991	0.9991	0.9991	0.9992	0.9992	0.9992	0.9992	0.9993	0.9993
3.2	0.9993	0.9993	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9995	0.9995	0.9995
3.3	0.9995	0.9995	0.9995	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9997
3.4	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9998
3.5	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998
3.6	0.9998	0.9998	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999

z	0.841	1.282	1.645	1.960	2.054	2.326	2.576	2.807	3.091	3.291
$\Phi(z)$	0.8000	0.9000	0.9500	0.9750	0.9800	0.9900	0.9950	0.9975	0.9990	0.9995