Université Claude Bernard Lyon 1
Licence de mathématiques – L2 mathématiques
Probabilités discrètes et statistiques descriptives

Contrôle terminal – 06 mai 2025

Durée : 120 minutes. L'énoncé comporte ***deux pages****. Le barème est indicatif.*
Calculatrices, téléphones, ordinateurs et documents interdits.
Chaque réponse doit être soigneusement justifiée.

Exercice 1. (5 points)

1. On considère n événements $X_1, \dots, X_{n-1}$ et X_n ($n \geq 2$) dans un espace probabilisé fini $(\Omega, \mathbb{P})$.
   (a) Rappeler la définition de l'indépendance deux à deux de ces n évènements.
   (b) Rappeler la définition de l'indépendance mutuelle de ces n événements.
2. On lance 2 fois une pièce de monnaie équilibrée et considère les événements suivants :

$$A = \ll \text{ On obtient Pile au 1er lancer } \gg,$$
$$B = \ll \text{ On obtient Face au 2ème lancer } \gg,$$
$$C = \ll \text{ On obtient le même résultat aux 1er et 2ème lancers } \gg.$$

   (a) Modéliser cette expérience aléatoire par un espace probabilisé fini $(\Omega, \mathbb{P})$.
   (b) Est-ce que A, B et C sont deux à deux indépendants ?
   (c) Est-ce que A, B et C sont mutuellement indépendants ?

Solution. 1. (a) Les n évènements sont deux à deux indépendants lorsque :

$$\mathbb{P}(X_i \cap X_j) = \mathbb{P}(X_i)\mathbb{P}(X_j) \quad \text{pour} \quad 1 \leq \mathrm{i} < \mathrm{j} \leq \mathrm{n}.$$

(b) Les n évènements sont mutuellement indépendants lorsque : pour tout $I \subset [n]$ on a

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{i \in I} X_i\right) = \prod_{i \in I} \mathbb{P}(X_i).$$

2. (a) Le résultat de chaque lancer est F (Face) ou P (Pile). Donc l'ensemble des résultats possibles est $\Omega = \{(F,F),(F,P),(P,F),(P,P)\}$, muni la probabilité uniforme $\mathbb{P}$. On trouve facilement que

$$A = \{(P,F),(P,P)\}, \quad B = \{(F,F),(P,F)\} \quad C = \{(F,F),(P,P)\},$$

et puis

$$\mathbb{P}(A) = 1/2, \quad \mathbb{P}(B) = 1/2, \quad \mathbb{P}(C) = 1/2.$$

(b) Très facilement, on obtient

$$A \cap B = \{(P, F)\}, \quad A \cap C = \{(P, P)\} \quad B \cap C = \{(F, F)\},$$

et puis

$$\mathbb{P}(A \cap B) = 1/4, \quad \mathbb{P}(A \cap C) = 1/4, \quad \mathbb{P}(B \cap C) = 1/4$$

Les évènements A, B et C sont donc 2 à 2 indépendants.

(c) On observe que $A \cap B \cap C = \emptyset$, donc $\mathbb{P}(A \cap B \cap C) = 0$, qui est différent de $\mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)\mathbb{P}(C) = 1/8$. Les évènements A, B et C ne sont donc pas mutuellement indépendants.

□

Exercice 2. (5 points) Soit B_n le nombre de partitions d'un ensemble à n éléments avec $B_0 = 1$. On appelle B_n le n-ième nombre de Bell.

(a) Donner toutes les partitions de l'ensemble $\{1, 2, 3\}$.

(b) Montrer que les nombres de Bell B_n satisfont la relation de récurrence :

$$B_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} B_k \qquad (n \geq 0).$$

(c) Soit X une variable aléatoire qui suit la loi de Poisson de paramètre 1. Pour tout $n \geq 1$, soit $b_n = \mathbb{E}[X^n]$ le moment d'ordre n de X. Soit $b_0 = 1$. Démontrer que

$$b_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} b_k.$$

(d) En déduire la formule de Dobinski :

$$B_n = \frac{1}{e} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{k^n}{k!} \qquad (n \geq 1).$$

Solution. (a) Les partitions de $\{1, 2, 3\}$ sont :

$$\{1, 2, 3\},\ \{1, 2\} - \{3\},\ \{1\} - \{2, 3\},\ \{2\} - \{1, 3\},\ \{1\} - \{2\} - \{3\}.$$

(b) Soit $\Omega = \{1, 2, \dots, n + 1\}$. Alors, le nombre de partitions de Ω est B_{n+1}.

— Soit Π une partition de Ω et soit $A \in \Pi$ la partie contenant $n + 1$ et de caldinal $n - k + 1$ $(0 \leq k \leq n)$. Alors $A \setminus \{n + 1\}$ est une partie de Ω et de cardinal $n - k$. Il y a donc $\binom{n}{n-k} = \binom{n}{k}$ de choix pour A ;

— D'autre part, l'ensemble $\Pi \setminus \{A\}$ est une partition de $\Omega \setminus A$ dont le nombre de partitions est B_k. En récapitulant on obtient l'identité

$$B_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} B_k.$$

(c) D'après la loi de Poisson de paramètre 1, on a

$$b_n = \mathbb{E}[X^n] = \frac{1}{e}\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{k^n}{k!}.$$

Par récurrence sur n. Par définition $b_0 = 1 = B_0$. Supposons que $b_k = B_k$ pour $0 \le k \le n$. On a

$$b_{n+1} = \frac{1}{e}\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{k^{n+1}}{k!} = \frac{1}{e}\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{k^n}{(k-1)!} = \frac{1}{e}\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(k+1)^n}{k!}.$$

Par la formule du binôme de Newton $(k+1)^n = \sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}k^j$ on obtient

$$b_{n+1} = \frac{1}{e}\sum_{k=0}^{+\infty}\sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}\frac{k^j}{k!} = \sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}\frac{1}{e}\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{k^j}{k!} = \sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}b_j.$$

Donc $b_{n+1} = B_{n+1}$ par l'hypothèse de récurrence.

(d) Par (b), pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a

$$B_n = b_n = \mathbb{E}(X^n) = \frac{1}{e}\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{k^n}{k!}.$$

□

Exercice 3. (5 points) Soient r et v deux entiers strictements positifs. On dispose d'une urne contenant r boules rouges et v boules vertes. On pioche successivement, sans remise, des boules dans l'urne jusqu'à épuisement du stock. On note à chaque étape la couleur de la boule piochée. Pour tout n compris entre 1 et $r+v$, on note :

- R_n, l'événement « la n-ième boule piochée est rouge »,
- V_n, l'événement « la n-ième boule piochée est verte ».

(a) Modéliser cette expérience par un espace probabilisé fini $(\Omega, \mathbb{P})$. Calculer $|\Omega|$.

(b) Établir une bijection de R_1 à R_n.

(c) Calculer $|R_n|$.

(d) En déduire $\mathbb{P}(R_n)$ et $\mathbb{P}(V_n)$.

Solution. (a) À chaque résultat de $r+v$ tirages on associe le mot $x_1 \dots x_{r+v}$, où $x_n =$R (resp. V) si la n$^{\text{e}}$ boule piochée est de couleur rouge (resp. verte) pour $i \in [r+v]$. D'où vient le modèle : Ω est l'ensemble des anagrammes du mot $\underbrace{\mathrm{R}\dots\mathrm{R}}_{\mathrm{r}}\underbrace{\mathrm{V}\dots\mathrm{V}}_{\mathrm{v}}$, muni de la probabilité uniforme. Par un résultat du cours on a $|\Omega| = \binom{r+v}{r}$.

(b) À chaque mot $w = x_1 \dots x_{r+v} \in R_1$ on pose $\Phi(w) = x'_1 \dots x'_{r+v} \in R_n$ en échangeant les deux lettres x_1 et x_n : $x_1 \leftrightarrow x_n$. Il est évident que $\Phi : R_1 \to R_n$ est une bijection.

(c) Il suffit de calculer $|R_1|$. On remarque que $x_1 \dots x_{r+v} \in R_1$ si et seulement si $x_2 \dots x_{r+v}$ est une anagramme du mot $R^{r-1}V^v$. Il s'en suit que $|R_n| = |R_1| = \binom{r-1+v}{r-1}$.

Remarque. On pourra utiliser le même argument pour calculer R_n sans passer par R_1.

(d) En combinant (a) et (c) on obtient

$$\mathbb{P}(R_n) = \frac{|R_n|}{|\Omega|} = \frac{\binom{r+v-1}{r-1}}{\binom{r+v}{r}} = \frac{r}{r+v}.$$

En échangeant r et v on trouve $\mathbb{P}(V_n) = \frac{v}{r+v}$.

□

Exercice 4. (5 points) Une enquête marketing a pour but de vérifier si les cibles potentielles seraient tentées par un nouveau produit. Il a été montré que 56% des gens sont favorables au nouveau produit. Pour aller plus loin, on intérroge à nouveau 200 personnes.

(a) Quelle est la loi du nombre de clients potentiels X parmi les 200 ?

(b) Par quelle loi peut-on l'approcher ?

(c) Calculer $\mathbb{P}[X > 100]$ et $\mathbb{P}[100 \leq X \leq 150]$ à 10^{-2} près. On rappelle quelques valeurs de racines carrées :

$$\sqrt{49,14} = 7,01, \ \sqrt{49,21} = 7,015, \ \sqrt{49,28} = 7,02.$$

(d) On souhaite maintenant demander des précisions à un grand nombre de personnes favorables au produit, mettons 100 personnes. Proposer une taille n de l'échantillon de personnes à interroger pour que notre échantillon contienne au moins 100 personnes favorables, avec une probabilité supérieure ou égale à 95%.

Solution. (a) La réponse (favorable ou pas) de chaque individu étant une variable de Bernoulli de paramètre $p = 0,56$, la loi de nombre de réponses favorables X est une loi binomiale $\mathscr{B}(n,p)$ de moyenne np et de variance $np(1-p)$.

(b) Comme $n \geq 100 > 30$, $np \geq 100 \times 0,56 \geq 5$ et $n(1-p) \geq 100 \times 0,46 \geq 5$, d'après le théorème central limite, on peut l'approcher par la loi normale $\mathscr{N}(np, np(1-p))$.

(c) Soit $X \sim \mathscr{B}(n,p)$ avec $n = 200$ et $p = 0,56$. Posons

$$Y = \frac{X - np}{\sqrt{np(1-p)}} = \frac{X - 0,56n}{\sqrt{0,2464n}} \sim \mathscr{N}(np, np(1-p)).$$

On note que $np = 200 \times 0,56 = 112$, $\sqrt{np(1-p)} = \sqrt{49,28} = 7,02$ et

$$\frac{100 - 0,56n}{\sqrt{0,2464n}} = \frac{-12}{7,02} = -\frac{200}{117} = -1.7094.$$

Donc

$$\mathbb{P}[X > 100] = \mathbb{P}[Y > -1.7094] = \mathbb{P}[x < 1.7094] = 0,9554 = 0,96,$$
$$\mathbb{P}[X \leq 150] = \mathbb{P}[Y \leq 38/7,02] = \mathbb{P}[Y \leq 5,4131] = 1,$$

et

$$\mathbb{P}[100 \leq X \leq 150] = \mathbb{P}[X \leq 150] - \mathbb{P}[X \leq 100] = 0,96.$$

(d) D'après (c), un échantillon de taille 200 est valable.

□

FONCTION DE RÉPARTITION DE LA LOI NORMALE STANDARD

$$\Phi(z) = \int_{-\infty}^{z} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, \mathrm{e}^{-x^2/2}\, dx$$

z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3.0	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990
3.1	0.9990	0.9991	0.9991	0.9991	0.9992	0.9992	0.9992	0.9992	0.9993	0.9993
3.2	0.9993	0.9993	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9995	0.9995	0.9995
3.3	0.9995	0.9995	0.9995	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9997
3.4	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9998
3.5	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998
3.6	0.9998	0.9998	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999

z	0.841	1.282	1.645	1.960	2.054	2.326	2.576	2.807	3.091	3.291
$\Phi(z)$	0.8000	0.9000	0.9500	0.9750	0.9800	0.9900	0.9950	0.9975	0.9990	0.9995