Chapitre 3 Variables aléatoires, cas fini

I Variable aléatoire et loi d'une variable aléatoire

Définition. Soit Ω un univers fini. On appelle variable aléatoire (v.a.) toute application de Ω dans $\mathbb{R}$.

Exemple : on lance 3 fois un dé.

$\Omega = \{1, 2, \dots, 6\}^3$.

$$X : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$(\omega_1, \omega_2, \omega_3) \longmapsto \omega_1 + \omega_2 + \omega_3$$

donne la somme des résultats des trois lancers.

En général on utilise les lettres majuscules de la fin de l'alphabet pour les v.a.

Notations probabilistes :

Pour x une valeur possible de X on note

$$\{X = x\} := X^{-1}(\{x\}) = \{\omega \in \Omega : X(\omega) = x\}.$$

Pour A une partie de $\mathbb{R}$,

$$\{X \in A\} := X^{-1}(A) = \{\omega \in \Omega : X(\omega) \in A\}$$

Définition (loi d'une v.a. finie). Soit $(\Omega, \mathbb{P})$ un espace de probabilité fini et $X : \Omega \to \mathbb{R}$ une v.a. à valeurs dans $\{x_1, \dots, x_N\}$ où $N \in \mathbb{N}^*$. On appelle loi de X la probabilité $\mathbb{P}_X : \mathcal{P}(\{x_1, \dots, x_N\}) \to [0,1]$ définie par la famille de poids

$$\left(p_{x_i} = \mathbb{P}(X = x_i) \right)_{i \in \{1, \dots, N\}}.$$

Rq : on a bien $p_{x_i} = \mathbb{P}(X = x_i) \geq 0$ pour tout $i \in \{1, \dots, N\}$, et

$$\sum_{i=1}^{N} p_{x_i} = \sum_{i=1}^{N} \mathbb{P}(X = x_i) \underset{\text{deux à deux disjoints}}{=} \mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{N} \{X = x_i\}\right) = \mathbb{P}(\Omega) = 1.$$

II Lois usuelles de variables aléatoires, espace fini.

* **Loi uniforme.**

$X : \Omega \to \mathbb{R}$ à valeurs dans $\{x_1, \dots, x_N\}$, $N \in \mathbb{N}^*$, est de loi uniforme (on note $X \sim \mathcal{U}(\{x_1, \dots, x_N\})$)

si $\mathbb{P}(X = x_i) = \frac{1}{N}$ pour tout $i \in \{1, \dots, N\}$.

Ex : on lance 1 dé équilibré. X résultat du lancer. $X \sim \mathcal{U}(\{1, 2, \dots, 6\})$.

* Loi de Bernoulli.

Soit $p \in [0,1]$. $X : \Omega \to \mathbb{R}$ est de loi de Bernoulli de paramètre p (on note $X \sim \mathcal{B}(p)$) si X est à valeurs dans $\{0,1\}$, et

$$\begin{cases} P(X=1) = p \\ P(X=0) = 1-p \end{cases}.$$

Permet de modéliser une expérience avec comme résultat possible un succès $(X=1)$ ou un échec $(X=0)$, et avec probabilité de succès p (épreuve de Bernoulli).

* Loi Binomiale.

Soit $N \in \mathbb{N}^*$ et $p \in [0,1]$. $X : \Omega \to \mathbb{R}$ suit la loi binomiale de paramètres N et p (on note $X \sim \mathcal{B}(N,p)$) si X est à valeurs dans $\{0,1,\dots,N\}$ et

$$\mathbb{P}(X=k) = \binom{N}{k} p^k (1-p)^{N-k}$$

pour tout $k \in \{0,1,\dots,N\}$.

C'est la loi du nombre X de succès lorsque l'on répète n fois de manière indépendante une épreuve de Bernoulli de probabilité de succès p.

Exemple : on lance 10 fois un dé à six faces équilibré, de manière indépendante. Soit X le nombre de 6 obtenu. $X \sim \mathcal{B}(10, \frac{1}{6})$.

* Loi hypergéométrique.

Une urne contient N boules indiscernables au toucher, dont K rouges $(K \leq N)$ et $N-K$ blanches.
On tire sans remise n boules $(n \leq N)$.

X désigne le nombre de boules rouges tirées.
Les valeurs possibles de X sont les entiers k satisfaisant $k \leq n$, $k \leq K$, $k \geq 0$

et $n-k \leq N-K \iff n-N+K \leq k$, i.e.
$\max(0, n-N+K) \leq k \leq \min(n, K)$.

Pour tout $\max(0, n-N+K) \leq k \leq \min(n, K)$ on a

$$\mathbb{P}(X = k) = \frac{\binom{K}{k}\binom{N-K}{n-k}}{\binom{N}{n}}$$

III Couples, vecteurs aléatoires et indépendance.

Pour deux v.a.r. sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathbb{P})$, on utilisera la notation

$$\mathbb{P}(X=x, Y=y) := \mathbb{P}(\{X=x\} \cap \{Y=y\})$$

Définition: soient deux variables aléatoires $X : \Omega \to \mathbb{R}$ et $Y : \Omega \to \mathbb{R}$ à valeurs respectivement dans $\{x_1, \dots, x_n\}$ et $\{y_1, \dots, y_m\}$. La loi du couple (X,Y) est la probabilité

$$\mathbb{P}_{(X,Y)} : \mathcal{P}(\{x_1, \dots, x_n\} \times \{y_1, \dots, y_m\}) \longrightarrow [0,1]$$

définie par la famille de poids

$$\left(p_{x_i, y_j} = \mathbb{P}(X = x_i, Y = y_j)\right)_{(i,j) \in \{1, \dots, n\} \times \{1, \dots, m\}}$$

Rq : on a bien $0 \leq p_{x_i, y_j} \leq 1$ et pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$

$$\mathbb{P}(X = x_i) = \mathbb{P}\left(\{X = x_i\} \cap \left(\bigcup_{j=1}^{m} \{Y = y_j\}\right)\right)$$
$$= \mathbb{P}\left(\bigcup_{j=1}^{m} \{X = x_i, Y = y_j\}\right)$$
$$\underset{\text{2 à 2 disjoints}}{=} \sum_{j=1}^{m} \mathbb{P}(X = x_i, Y = y_j)$$

et donc
$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} \mathbb{P}(X = x_i, Y = y_j) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(X = x_i) = 1.$$

Etant donnée la loi d'un couple (X, Y) de variables aléatoires, les lois de X et Y sont appelée lois marginales. On a de plus
$$\mathbb{P}(X = x_i) = \sum_{j=1}^{m} \mathbb{P}(X = x_i, Y = y_j)$$
$$\mathbb{P}(Y = y_j) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(X = x_i, Y = y_j).$$

Ex : (X,Y) couple de v.a. à valeurs dans $\{0,1\}^2$ de loi donnée par

$\mathbb{P}(X=0, Y=0) = \frac{1}{3}$ $\mathbb{P}(X=1, Y=0) = \frac{1}{4}$

$\mathbb{P}(X=0, Y=1) = \frac{1}{6}$ $\mathbb{P}(X=1, Y=1) = \frac{1}{4}$

On peut représenter cette loi par le tableau

X\Y	0	1
0	1/3	1/6
1	1/4	1/4

X est à valeurs dans $\{0,1\}$, avec

$$\mathbb{P}(X=0) = \mathbb{P}(X=0, Y=0) + \mathbb{P}(X=0, Y=1) = \frac{1}{2}$$
$$\mathbb{P}(X=1) = \mathbb{P}(X=1, Y=0) + \mathbb{P}(X=1, Y=1) = \frac{1}{2}.$$

Donc $X \sim \mathcal{B}(\frac{1}{2})$.

D'autre part $Y \sim \mathcal{B}(5/12)$.