

Chapitre 2 : Probabilités finies.

I Ensemble des possibles et événements

On appelle expérience aléatoire un phénomène dont on ne connaît pas l'issue avec certitude, mais dont on connaît l'ensemble des possibles.

Cet ensemble, noté Ω , est appelé univers ou ensemble fondamental ou ensemble des possibles.

Exemples:

* un lancer de dé. $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

* nbre de connexions au serveur de Lyon 1 sur une journée. $\Omega = \mathbb{N}$

* tps d'attente à une caisse du supermarché
 $\Omega = \mathbb{R}_+$.

* cours d'une action $\Omega = C(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$

On suppose dans ce chapitre que Ω est fini.

Définition. Etant donné un univers fini Ω ,
on appelle événement tout sous-ensemble de Ω .
L'ensemble des événements est donc $\mathcal{P}(\Omega)$.

Pour désigner les événements on utilise traditionnellement
les lettres capitales de début de l'alphabet.

Exemple. On lance un dé. $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.
L'événement A décrit par la phrase "on obtient un
chiffre pair" est $A = \{2, 4, 6\}$.

Définition. On appelle événement élémentaire
tout singleton $\{\omega\}$, où $\omega \in \Omega$ est un résultat
possible de l'expérience.

Le langage ensembliste permet de décrire les observations de l'expérience aléatoire.

Observations

Résultat possible

Événement

Événement certain

Événement impossible

L'événement A implique l'événement B

"A est réalisé ou B est réalisé"

"A est réalisé et B est réalisé"

"A n'est pas réalisé"

A et B sont incompatibles

Termes ensemblistes

ω ($\omega \in \Omega$)

A ($A \subset \Omega$)

Ω

$\emptyset$

$A \subset B$

$A \cup B$

$A \cap B$

A^c

$A \cap B = \emptyset$

II Probabilité.

Définition. Étant donné un univers fini Ω on appelle probabilité sur Ω toute application

$$\begin{aligned} P : \mathcal{P}(\Omega) &\longrightarrow [0,1] \\ A &\longmapsto P(A) \end{aligned}$$

vérifiant

* $P(\Omega) = 1$

* pour tous événements A, B incompatibles
(tels que $A \cap B = \emptyset$),

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B).$$

On appelle le couple (Ω, P) espace de probabilité.

Proposition 1) Soit (Ω, P) est un espace de probabilité, pour tout événement A on a

$$P(A) = \sum_{\omega \in A} P(\{\omega\}).$$

P est entièrement définie par la famille des poids

$(p_\omega = P(\{\omega\}))_{\omega \in \Omega}$, qui vérifie

$$p_\omega \geq 0 \quad \forall \omega \in \Omega \quad \text{et} \quad \sum_{\omega \in \Omega} p_\omega = 1. \quad (*)$$

2) Réciproquement, toute famille de poids positifs $(p_\omega)_{\omega \in \Omega}$ de somme égale à 1 définit une probabilité P sur Ω par la formule, pour tout événement A ,

$$P(A) = \sum_{\omega \in A} p_\omega.$$

Preuve.

1) Soit A un événement, avec $|A| = k$ où $k \in \{1, \dots, n\}$.
Notons $\omega_1, \dots, \omega_k$ les éléments de A .

$$\begin{aligned} \text{Alors } P(A) &= P(\{\omega_1, \dots, \omega_k\}) \\ &= P(\{\omega_1, \dots, \omega_{k-1}\} \cup \{\omega_k\}) \end{aligned}$$

$\uparrow$
 événements incompatibles

$$= P(\{\omega_1, \dots, \omega_{k-1}\}) + P(\{\omega_k\}).$$

Par un raisonnement par récurrence, on obtient

$$\begin{aligned} P(A) &= P(\{\omega_1\}) + \dots + P(\{\omega_k\}) \\ &= \sum_{\omega \in A} p_\omega. \end{aligned}$$

Par définition de P on a bien $p_\omega \in [0, 1]$, et

$$\sum_{\omega \in \Omega} p_\omega = P(\Omega) = 1.$$

2) L'application $P: \mathcal{F}(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$ et bien
 $A \mapsto \sum_{\omega \in A} p_\omega$

à valeurs dans $[0, 1]$, vérifie $P(\Omega) = \sum_{\omega \in \Omega} p_\omega = 1$

et si A et B sont incompatibles,

$$\begin{aligned} P(A \cup B) &= \sum_{\omega \in (A \cup B)} p_\omega \\ &= \sum_{\omega \in A} p_\omega + \sum_{\omega \in B} p_\omega \\ A \cap B &= \emptyset \\ &= P(A) + P(B). \end{aligned}$$

Exemple : * on tire une pièce équilibrée.

$$\Omega = \{P, G\}, \quad P_P = P_G = \frac{1}{2}.$$

* Sur $\Omega = \{0, 1, 2, \dots, n\}$ avec $n \geq 1$ on peut définir par tout $p \in [0, 1]$ une probabilité à l'aide des poids $(p_k = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k})_{k \in \{0, 1, \dots, n\}}$ appelée la binomiale.

Définition : si Ω est un univers fini on appelle probabilité uniforme sur Ω la probabilité P

définie par
$$P : \mathcal{P}(\Omega) \rightarrow [0, 1]$$
$$A \mapsto \frac{|A|}{|\Omega|}$$

Elle est associée à la famille de poids

$$(p_\omega = \frac{1}{|\Omega|})_{\omega \in \Omega}.$$

Exemple. On lance 2 fois un dé équilibré $\Omega = \{1, 2, \dots, 6\}^2$, P probabilité uniforme sur Ω .

A : "le résultat du deuxième lancer est 4".

$$A = \{1, 2, \dots, 6\} \times \{4\}. \quad P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}.$$

III Calculs de probabilité.

Proposition : Soient $(\Omega, \mathbb{P})$ un espace de probabilité fini et A, B des événements. On a les égalités suivantes.

- 1) $\mathbb{P}(A^c) = 1 - \mathbb{P}(A)$
- 2) Si $B \subset A$, $\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(A) - \mathbb{P}(A \setminus B)$
- 3) $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)$

Preuve.

- 1) Comme $\Omega = A \cup A^c$ et $A \cap A^c = \emptyset$,

$$1 = \mathbb{P}(\Omega) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(A^c).$$

- 2) Même idée, $A = B \cup (A \setminus B)$ et $B \cap (A \setminus B) = \emptyset$
ce qui implique $\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(A \setminus B)$.

- 3) On a $A \cup B = A \cup (B \setminus (A \cap B))$

et $A \cap (B \setminus (A \cap B)) = \emptyset$, donc

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(A \cup B) &= \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B \setminus (A \cap B)) \\ &= \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B). \end{aligned}$$

2)

Proposition. Soit $(\Omega, \mathcal{P})$ un espace de probabilité fini et $A_1, \dots, A_n$ des événements. On a

$$P\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right) = \sum_{k=1}^n (-1)^{k+1} \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq n} P(A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_k})$$

Preuve identique à celle de la formule d'inclusion exclusion, en remplaçant les cardinaux par des probabilités.

IV Conditionnement, indépendance d'événements

1) Conditionnement.

Définition: Soit $(\Omega, \mathcal{P})$ un espace de probabilité, et $B \subset \Omega$ satisfaisant $P(B) > 0$. La probabilité conditionnelle de A sachant B , notée $P(A|B)$ est définie par

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}.$$

Intuition: on est dans la situation où l'on sait que B est réalisé, on restreint l'univers des possibles ($P(A|B) = 0$ si A et B sont incompatibles), $P(A|B)$ représente la proportion occupée par A (ou de manière équivalente $A \cap B$) dans B .

Exemple. on lance deux dés. $\Omega = \{1, 2, \dots, 6\}^2$

P probabilité uniforme sur Ω .

A : "le résultat du 1^{er} dé est 5"

B : "la somme des deux résultats est 7"

$$A = \{5\} \times \{1, 2, \dots, 6\}$$

$$B = \{(1, 6), (2, 5), (3, 4), (4, 3), (5, 2), (6, 1)\}.$$

$$A \cap B = \{(5, 2)\}.$$

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{|A \cap B| / |\Omega|}{|B| / |\Omega|} = \frac{1}{6}.$$

Proposition: Soit (Ω, P) un espace de probabilité fin et B un événement satisfaisant $P(B) > 0$.

Alors l'application

$$P(\cdot | B) : \begin{array}{ccc} \mathcal{P}(\Omega) & \longrightarrow & [0, 1] \\ A & \longmapsto & P(A|B) \end{array}$$

définit une probabilité sur Ω .

Preuve

On définit $p_\omega^B = P(\{\omega\} \cap B)$ pour tout $\omega \in \Omega$,
on a bien $p_\omega^B \geq 0$ pour tout $\omega \in \Omega$ et

$$\begin{aligned} \sum_{\omega \in \Omega} p_\omega^B &= \frac{1}{P(B)} \sum_{\omega \in \Omega} P(\{\omega\} \cap B) \\ &= \frac{1}{P(B)} P\left(\left(\bigcup_{\omega \in \Omega} \{\omega\}\right) \cap B\right) \\ &\quad \text{deux à deux} \quad \text{disjoints} \\ &= \frac{P(\Omega \cap B)}{P(B)} = \frac{P(B)}{P(B)} = 1. \end{aligned}$$

Définition. on dit que N événements
 $B_1, \dots, B_N$ ($N \geq 1$) réalisent une partition
de Ω s'ils sont deux à deux disjoints
et $\bigcup_{i=1}^N B_i = \Omega$.

Proposition (Formule de probabilités totales)

Si $N \in \mathbb{N}^+$ et $B_1, \dots, B_N$ réalisent une partition de Ω avec de plus $P(B_i) > 0$ pour tout $i \in \{1, \dots, N\}$, alors pour tout événement A ,

$$P(A) = \sum_{i=1}^N P(A|B_i) P(B_i).$$

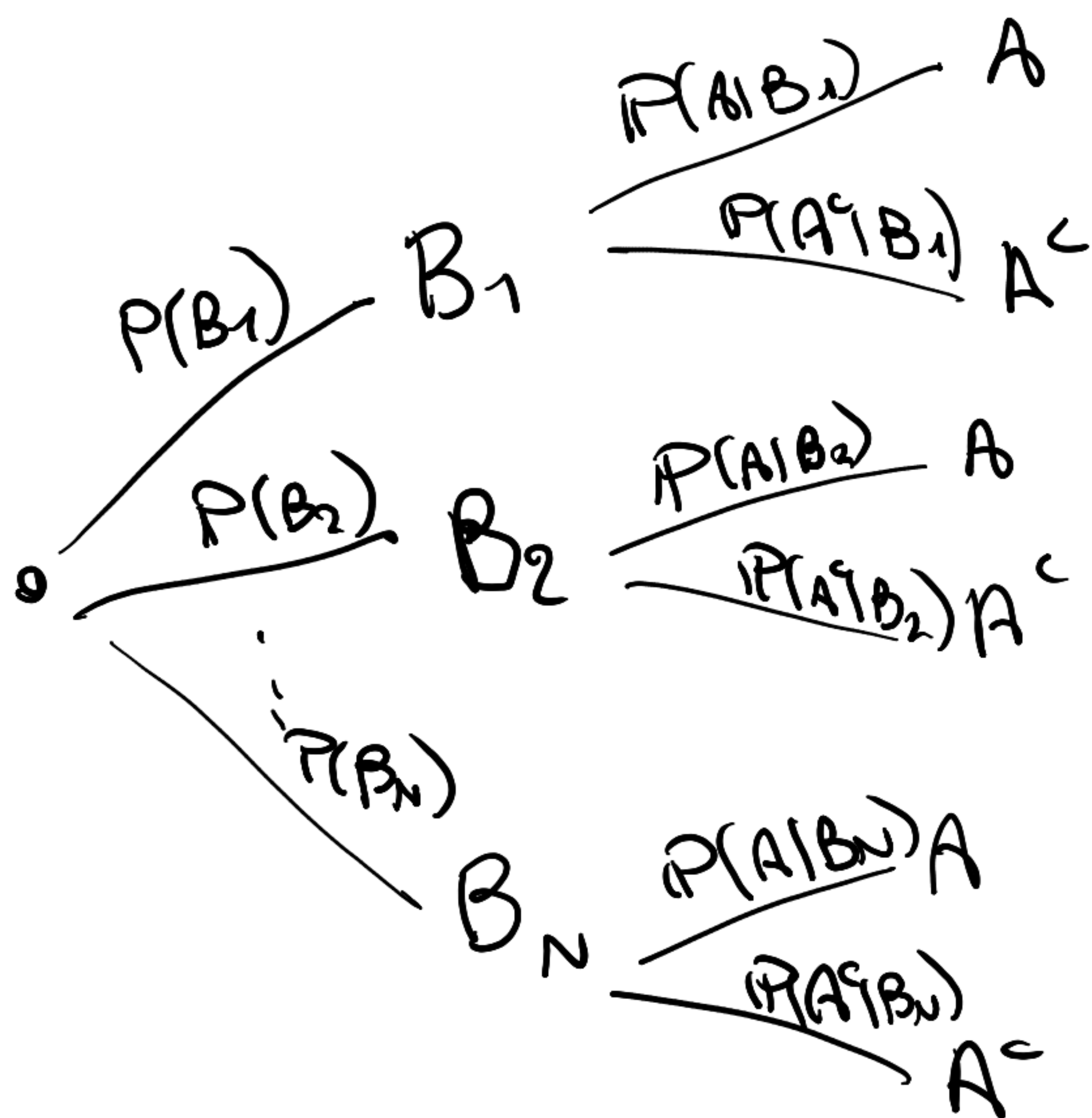
Preuve

$$\begin{aligned} P(A) &= P(A \cap \Omega) = P\left(A \cap \left(\bigcup_{i=1}^N B_i\right)\right) \\ &= P\left(\bigcup_{i=1}^N (A \cap B_i)\right) \end{aligned}$$

$$\stackrel{\substack{\text{deux à deux} \\ \text{disjoints}}}{=} \sum_{i=1}^N P(A \cap B_i)$$

$$= \sum_{i=1}^N \frac{P(A \cap B_i)}{P(B_i)} P(B_i).$$

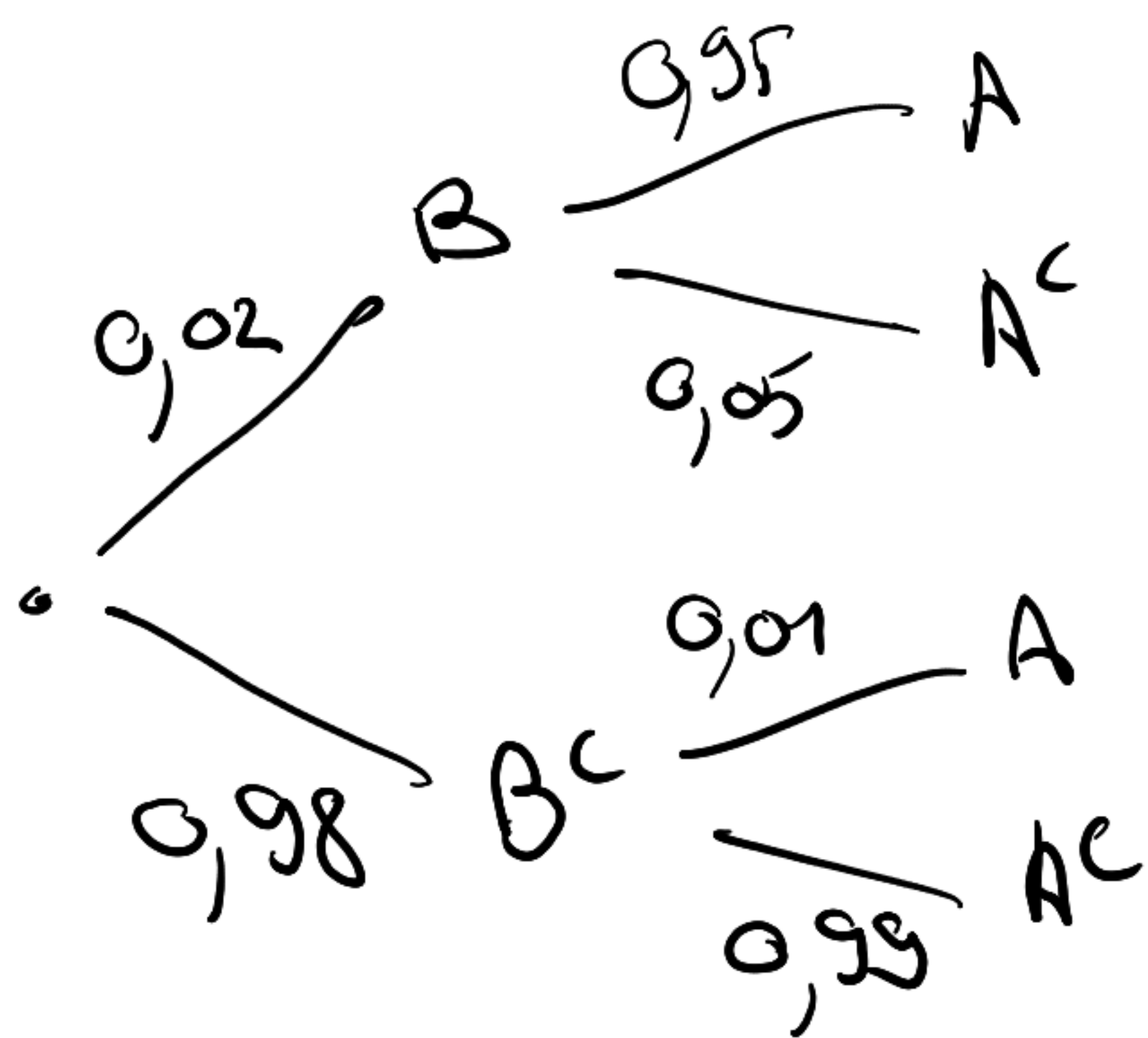
Intuition: on parcourt un arbre



Exemple: dans une population, 2% de personnes sont malades. On tire une personne au hasard et on teste si elle est malade.
Sachant qu'elle est malade, le test est positif à 95%.
Sachant qu'elle n'est pas malade, il est positif à 1%.

A: "le test est positif"

B: "la personne est malade"



$$P(A) = P(A|B)P(B) + P(A|B^c)P(B^c) \\ = 0,95 \cdot 0,02 + 0,01 \cdot 0,98 = 0,0288$$

Proposition (formule de Bayes) Si $B_1, \dots, B_N$ réalisent une partition de Ω avec $P(B_i) > 0$ par tout $i \in \{1, \dots, N\}$ et A est un événement tel que $P(A) > 0$, par tout $i \in \{1, \dots, N\}$

$$P(B_i | A) = \frac{P(A|B_i)P(B_i)}{\sum_{j=1}^N P(A|B_j)P(B_j)}$$

Preuve:

$$P(B_i | A) = \frac{P(B_i \cap A)}{P(A)}$$

et formule de probabilités totales.

Intuition: inverse le conditionnement dans l'arbre.

Ex: retour au test de maladie.

$$P(B|A) = \frac{P(A|B)P(B)}{P(A|B)P(B) + P(A|B^c)P(B^c)}$$
$$= \frac{0,02 \cdot 0,95}{0,02 \cdot 0,95 + 0,98 \cdot 0,01}$$

↑
"malade sachant
que le test est positif" $\approx 0,66$.

2) Indépendance d'événements.

Définition. Soit (Ω, P) un espace de probabilité fini et A et B deux événements.
On dit que A et B sont indépendants

si

$$P(A \cap B) = P(A)P(B).$$

Remarque : si $P(B) > 0$,

A et B sont
indépendants

$$\Leftrightarrow P(A|B) = P(A)$$

La réalisation de B n'a pas d'influence sur A.

Exemple : on lance deux fois un dé. $\Omega = \{1, 2, \dots, 6\}^2$

P probabilité uniforme sur Ω .

A : "le premier dé donne 6"

$$A = \{6\} \times \{1, 2, \dots, 6\}$$

B : "le deuxième dé donne 2"

$$B = \{1, 2, \dots, 6\} \times \{2\}$$

$$A \cap B = \{(6, 2)\}.$$

$$\text{On a } P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$$

$$P(B) = \frac{|B|}{|\Omega|} = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$$

$$P(A \cap B) = \frac{|A \cap B|}{|\Omega|} = \frac{1}{36} = P(A)P(B).$$

Ainsi, A et B sont indépendants.

Définition. Soit (Ω, P) un espace de probabilités fini et $A_1, \dots, A_n$ des événements (avec $n \geq 1$). Alors on dit que $A_1, \dots, A_n$ sont mutuellement indépendants si pour tout $k \in \{2, 3, \dots, n\}$ et tous indices $i_1, \dots, i_k$ éléments de $\{1, \dots, n\}$ distincts on a

$$P(A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_k}) = P(A_{i_1}) \dots P(A_{i_k}).$$

Par exemple, si $n=3$, A_1, A_2, A_3 sont mutuellement indépendants si

$$P(A_1 \cap A_2) = P(A_1)P(A_2), \quad P(A_1 \cap A_3) = P(A_1)P(A_3),$$

$$P(A_2 \cap A_3) = P(A_2)P(A_3), \quad P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = P(A_1)P(A_2)P(A_3).$$

Exemple: on lance deux fois un dé équilibré à six faces. On considère $\Omega = \{1, 2, \dots, 6\}^2$, P la probabilité uniforme sur Ω et les événements

A : "le résultat du premier lancer est impair"

B : "le résultat du deuxième lancer est impair"

C: "la somme des deux résultats est impaire".

On a

$$A = \{1, 3, 5\} \times \{1, 2, 3, 4, 5, 6\},$$

$$B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} \times \{1, 3, 5\},$$

$$C = (\{1, 3, 5\} \times \{2, 4, 6\}) \cup (\{2, 4, 6\} \times \{1, 3, 5\}),$$

$$A \cap B = \{1, 3, 5\}^2, \quad A \cap C = \{1, 3, 5\} \times \{2, 4, 6\},$$

$$B \cap C = \{2, 4, 6\} \times \{1, 3, 5\}, \quad A \cap B \cap C = \emptyset,$$

et donc

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{3 \times 6}{6^2} = \frac{1}{2}, \quad P(B) = \frac{|B|}{|\Omega|} = \frac{6 \times 3}{6^2} = \frac{1}{2}$$

$$P(C) = \frac{3^2 + 3^2}{6^2} = \frac{1}{2}, \quad P(A \cap B) = \frac{|A \cap B|}{|\Omega|} = \frac{3^2}{6^2} = \frac{1}{4},$$

$$P(B \cap C) = \frac{3^2}{6^2} = \frac{1}{4}, \quad P(A \cap C) = \frac{3^2}{6^2} = \frac{1}{4},$$

$$\text{et } P(A \cap B \cap C) = 0.$$

On remarque que A et B sont indépendants,
A et C sont indépendants, B et C sont indépendants
mais A, B, C ne sont pas mutuellement
indépendants.

3) Répétitions indépendantes -

Pour modéliser une expérience aléatoire constituée de deux expériences successives, modélisées respectivement par les espaces de probabilité $(E, \mathbb{P}_E)$ et $(F, \mathbb{P}_F)$, on considère l'univers $\Omega = E \times F$ et la probabilité $\mathbb{P}$ associée à la famille de probas $(P_{xy} = \mathbb{P}_E(\{x\}) \mathbb{P}_F(\{y\}))_{(x,y) \in E \times F}$.

Exemple. On lance un dé à six faces, puis une pièce équilibrée.
Ici $E = \{1, \dots, 6\}$, $\mathbb{P}_E$ proba uniforme sur E ,
 $F = \{P, G\}$, $\mathbb{P}_F$ proba uniforme sur F .

$$\Omega = \{1, 2, \dots, 6\} \times \{P, G\}.$$

$$\text{Pour tout } (x, y) \in \Omega, \quad \mathbb{P}(\{x, y\}) = \frac{1}{6} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{12}$$

$\hookrightarrow \mathbb{P}$ proba uniforme sur Ω .

* Pour modéliser une expérience constituée de N répétitions indépendantes de la même expérience (modélisée par l'espace de probabilité $(E, \mathcal{P}_E)$) on considère l'univers $\Omega = E^N$ et la probabilité P associée à la famille de prob.

$$P_{x_1, \dots, x_N} = P_E(\{x_1\}) \dots P_E(\{x_N\}).$$

Req: si P_E est la probabilité uniforme sur E , P est la probabilité uniforme sur Ω .

Exemple. On lance 10 fois un dé équilibré, de manière indépendante. $\Omega = \{1, \dots, 6\}^{10}$, et P est la probabilité uniforme sur Ω .

* Schéma de Bernoulli

On se place dans le cas de N répétitions indépendantes d'une expérience (appelée épreuve de Bernoulli) ayant pour résultats possibles un succès avec probabilité p ou un échec avec probabilité $1-p$.

On a $E = \{0, 1\}$, $P_E(\{1\}) = p$, $P_E(\{0\}) = 1-p$,
 $\Omega = E^N$, $P(\{(a_1, \dots, a_N)\}) = P_E(\{a_1\}) \dots P_E(\{a_N\})$.

Définissons, pour $k \in \{0, 1, \dots, N\}$, les événements

A_k : "il y a exactement k succès". On a

* $A_0 = \{(0, 0, \dots, 0)\}$, et $P(A_0) = \underbrace{P_E(\{0\}) \dots P_E(\{0\})}_{N \text{ fois}} = (1-p)^N$

* $A_1 = \{(1, 0, \dots, 0), (0, 1, 0, \dots, 0), \dots, (0, \dots, 0, 1)\}$
 A_1 est constituée de N événements élémentaires
de même probabilité $P_E(\{1\}) (P_E(\{0\}))^{N-1} = p(1-p)^{N-1}$,
et donc $P(A_1) = N p (1-p)^{N-1}$.

* De manière générale, A_k est formé de $\binom{N}{k}$ événements élémentaires (on choisit pour chacun un ensemble de k positions par les s parmi N positions possibles), de probabilité $P_E(\{1\})^k (P_E(\{0\}))^{N-k}$,

et donc $P(A_k) = \binom{N}{k} p^k (1-p)^{N-k}$.