

## CONTRÔLE CONTINU

17 mars 2025

*Durée : 90 minutes. L'énoncé comporte une page.  
Calculatrices, téléphones, ordinateurs et documents interdits.*

**Exercice 1** (Question de cours, 3 points).

1. Énoncer la formule de Bayes.
2. Donner la définition de l'espérance et de la variance d'une variable aléatoire  $X$ .
3. Soit  $X$  une variable aléatoire. Démontrer que  $\text{Var}(aX + b) = a^2 \text{Var}(X)$ .

**Solution 1.** 1. (1pt) Soient  $A$  et  $B$  des événements de probabilités non nulles. Alors

$$\mathbb{P}(B|A) = \frac{\mathbb{P}(A|B)\mathbb{P}(B)}{\mathbb{P}(A)}$$

2. (0,5+0,5pt) Soit  $X$  une variable aléatoire (réelle). On a  $\mathbb{E}(X) = \sum_{x \in X(\Omega)} x\mathbb{P}(X = x)$  et  $\text{Var}(X) = \mathbb{E}((X - \mathbb{E}(X))^2)$ .
3. (1pt)  $\text{Var}(aX + b) = \mathbb{E}((aX + b - \mathbb{E}(aX + b))^2) = \mathbb{E}((aX + b - a\mathbb{E}(X) - b)^2)$   
 $= \mathbb{E}((aX - a\mathbb{E}(X))^2) = \mathbb{E}((a^2X^2 - 2a^2X\mathbb{E}(X) + a^2\mathbb{E}(X)^2)) = a^2(\mathbb{E}(X^2) - 2\mathbb{E}(X)^2 + \mathbb{E}(X)^2) = a^2 \text{Var}(X)$

**Exercice 2** (3 points). Vingt sportifs participent à une course. Les participants arrivés premier, deuxième et troisième constituent le podium (il n'y a pas d'ex-æquo).

1. Combien y-a-t-il de podiums possibles ?
2. Pour un participant donné, combien y-a-t-il de podiums dont il peut faire partie ?
3. Les trois participants arrivés en premier reçoivent une récompense identique. Combien y-a-t-il de distributions de récompenses possibles ?

**Solution 2.**

1. (1pt) Il s'agit du nombre d'arrangements de 3 éléments dans un ensemble à 20 éléments, qui vaut  $A_{20}^3 = 20.19.18 = 6840$ .
2. (1pt) Le participant donné a 3 places possibles, et il y a  $A_{19}^2 = 19.18 = 342$  choix pour les deux autres places du podium. On obtient finalement  $3.342 = 1026$  possibilités.
3. (1pt) Cela revient à choisir 3 participants parmi 20 (sans tenir compte de l'ordre), ce qui donne  $\binom{20}{3} = \frac{20.19.18}{3.2} = 1140$ .

**Exercice 3** (4 points). On jette deux dés équilibrés. On considère les événements suivants :

$A$  = obtenir un chiffre impair sur le premier dé,  
 $B$  = obtenir un chiffre pair sur le deuxième dé,  
 $C$  = la somme des deux chiffres est un chiffre impair.

1. Décrire la situation avec un ensemble fondamental  $\Omega$  et donner la probabilité des événements élémentaires :  $\mathbb{P}(\{\omega\})$  pour tout  $\omega \in \Omega$ .
2. Est-ce que les événements  $A$  et  $B$  sont indépendants ?
3. Est-ce que les événements  $A$  et  $C$  sont indépendants ?

4. Est-ce que les événements  $A$ ,  $B$  et  $C$  sont mutuellement indépendants ?

**Solution 3.**

- (1pt) On peut prendre l'ensemble fondamental constitué de toutes les paires ordonnées de chiffres entre 1 et 6, donc 36 événements élémentaires :  $(i, j)$  pour  $1 \leq i, j \leq 6$ . Tous les événements élémentaires ont la même chance d'apparaître, donc  $\mathbb{P}(\{(i, j)\}) = \frac{1}{36}$  pour tout  $1 \leq i, j \leq 6$ .
- (1pt) On calcule  $\mathbb{P}(A) = \frac{18}{36} = \frac{1}{2}$ ,  $\mathbb{P}(B) = \frac{18}{36} = \frac{1}{2}$ , et  $\mathbb{P}(C) = \frac{18}{36} = \frac{1}{2}$ . On a de plus  $\mathbb{P}(A \cap B) = \frac{9}{36} = \frac{1}{4}$  et  $\mathbb{P}(A) \times \mathbb{P}(B) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$ . Les événements  $A$  et  $B$  sont donc indépendants.
- (1pt)  $\mathbb{P}(A \cap C) = \frac{9}{36} = \frac{1}{4}$  et  $\mathbb{P}(A) \times \mathbb{P}(C) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$ . Les événements  $A$  et  $C$  sont donc indépendants.
- (1pt) On a  $\mathbb{P}(A \cap B \cap C) = \mathbb{P}(C|A \cap B)\mathbb{P}(A \cap B) = 1 \cdot \mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) \cdot \mathbb{P}(B) \neq \mathbb{P}(A) \cdot \mathbb{P}(B) \cdot \mathbb{P}(C)$ , les événements  $A$ ,  $B$  et  $C$  ne sont donc pas mutuellement indépendants. On aurait aussi pu utiliser le fait que  $\mathbb{P}(A \cap B \cap C) = 9/36 = 1/4$  qui n'est pas égale à  $\mathbb{P}(A) \cdot \mathbb{P}(B) \cdot \mathbb{P}(C) = 1/8$ .

**Exercice 4** (4 points). On considère le jet de deux dés indépendants. Soit  $X$  la variable aléatoire représentant le nombre sur le dé ayant la plus grande valeur, et soit  $Y$  le nombre de 5 ou de 6 obtenus. Il est facile de vérifier que les lois de  $X$  et  $Y$  sont données par

$$\begin{array}{c|cccccc} k & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ \hline \mathbb{P}(X = k) & \frac{1}{36} & \frac{3}{36} & \frac{5}{36} & \frac{7}{36} & \frac{9}{36} & \frac{11}{36} \end{array} \text{ et } \begin{array}{c|ccc} k & 0 & 1 & 2 \\ \hline \mathbb{P}(Y = k) & \frac{16}{36} & \frac{16}{36} & \frac{4}{36} \end{array}$$

- Calculer la loi conjointe de  $X$  et  $Y$ . (On pourra donner le résultat sous forme d'un tableau.)
- Les variables  $X$  et  $Y$  sont-elles indépendantes ?
- Calculer la loi de  $X$  sachant  $Y = 1$ , c'est-à-dire calculer  $\mathbb{P}(X = k | Y = 1)$  pour  $k = 1, \dots, 6$ .
- Calculer  $\text{cov}(X, Y)$ .

**Solution 4.**

- (1pt) On peut expliciter les événements  $(X = x) \cap (Y = y)$  pour tous  $1 \leq x \leq 6$  et  $0 \leq y \leq 2$  en termes d'événements élémentaires  $(i, j) \in \{1, \dots, 6\}^2$ . On obtient la loi conjointe suivante.

|     |   | $X$  |      |      |      |      |      |
|-----|---|------|------|------|------|------|------|
|     |   | 1    | 2    | 3    | 4    | 5    | 6    |
| $Y$ | 0 | 1/36 | 3/36 | 5/36 | 7/36 | 0    | 0    |
|     | 1 | 0    | 0    | 0    | 0    | 8/36 | 8/36 |
|     | 2 | 0    | 0    | 0    | 0    | 1/36 | 3/36 |

On peut vérifier que toutes les probabilités sont entre 0 et 1, et en les sommant on obtient 1. De plus, en sommant les probabilités dans chacune des lignes du tableau on obtient la loi marginale de  $Y$ , et en sommant dans les colonnes on obtient la loi marginale de  $X$ .

- (1pt) Non. Pour qu'elles le soient, il faut que  $\mathbb{P}(X = x, Y = y) = \mathbb{P}(X = x)\mathbb{P}(Y = y)$  pour chaque  $(x, y)$ . Or  $\mathbb{P}(X = 1, Y = 1) \neq \mathbb{P}(X = 1)\mathbb{P}(Y = 1)$ .
- (1pt) D'après la définition,

$$\mathbb{P}(X = x | Y = 1) = \frac{\mathbb{P}(X = x, Y = 1)}{\mathbb{P}(Y = 1)}.$$

On obtient la loi conditionnelle

| $x$                         | 1 | 2 | 3 | 4 | 5   | 6   |
|-----------------------------|---|---|---|---|-----|-----|
| $\mathbb{P}(X = x   Y = 1)$ | 0 | 0 | 0 | 0 | 1/2 | 1/2 |

4. (1pt) D'après la définition

$$\text{cov}(X, Y) = \mathbb{E}[XY] - \mathbb{E}[X]\mathbb{E}[Y].$$

On a

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[XY] &= 0 \times \frac{1+3+5+7}{36} + 1 \times 5 \times \frac{8}{36} + 1 \times 6 \times \frac{8}{36} + 2 \times 5 \times \frac{1}{36} + 2 \times 6 \times \frac{3}{36} = \frac{134}{36}, \\ \mathbb{E}[X] &= 1 \times \frac{1}{36} + 2 \times \frac{3}{36} + 3 \times \frac{5}{36} + 4 \times \frac{7}{36} + 5 \times \frac{9}{36} + 6 \times \frac{11}{36} = \frac{161}{36}, \\ \mathbb{E}[Y] &= 0 \times \frac{16}{36} + 1 \times \frac{16}{36} + 2 \times \frac{4}{36} = \frac{24}{36}, \\ \text{cov}(X, Y) &= \frac{4824 - 161 \times 24}{1296} = \frac{20}{27}.\end{aligned}$$

**Exercice 5** (6 points). Soit  $X$  une variable aléatoire dont la loi est donnée par  $\mathbb{P}(X = i) = c(1-p)^i$  pour  $i = 0, 1, 2, \dots$  et  $0 < p < 1$ .

1. Montrer que  $c = p$ .
2. Calculer  $\mathbb{P}(X = 0)$ .
3. Calculer  $\mathbb{P}(X > 2)$ .
4. Montrer que  $\mathbb{P}(X > m + n | X \geq n) = \mathbb{P}(X > m)$  pour  $m, n$  entiers.  
*Indication* : On pourra utiliser le fait que  $1 + u + u^2 + \dots + u^n = \frac{1-u^{n+1}}{1-u}$  si  $u \neq 1$ .

**Solution 5.**

1. (2pt) On sait que  $\sum_{x_i} f(x_i) = \sum_{i=0}^{\infty} P(X = i) = 1$  et on a

$$\sum_{i=0}^{\infty} \mathbb{P}(X = i) = c \sum_{i=0}^{\infty} (1-p)^i = \frac{c}{1-(1-p)} = \frac{c}{p}.$$

Il faut donc que  $c = p$ .

2. (1pt)  $\mathbb{P}(X = 0) = p(1-p)^0 = p$ .
3. (1pt)  $\mathbb{P}(X > 2) = 1 - \mathbb{P}(X = 0) - \mathbb{P}(X = 1) - \mathbb{P}(X = 2) = 1 - p - p(1-p) - p(1-p)^2 = (1-p)(1-p-p(1-p)) = (1-p)^2(1-p) = (1-p)^3$ .
4. (2pt) Par définition de la probabilité conditionnelle on a

$$\mathbb{P}(X > n + m | X \geq n) = \frac{\mathbb{P}(\{X > n + m\} \cap \{X \geq n\})}{\mathbb{P}(X \geq n)}.$$

Remarquons que  $X > n + m$  implique que  $X \geq n$ . Donc,  $\{X > n + m\} \subset \{X \geq n\}$  et  $\mathbb{P}(\{X > n + m\} \cap \{X \geq n\}) = \mathbb{P}(X > n + m)$ . Par conséquent,

$$\mathbb{P}(X > n + m | X \geq n) = \frac{\mathbb{P}(X > n + m)}{\mathbb{P}(X \geq n)}.$$

Il nous reste donc à calculer  $\mathbb{P}(X \geq k)$  et  $\mathbb{P}(X > k)$  pour  $k = 0, 1, 2, \dots$ . D'après la loi de la variable  $X$ , on a

$$\mathbb{P}(X \geq k) = \sum_{i=k}^{\infty} \mathbb{P}(X = i) = 1 - \sum_{i=0}^{k-1} \mathbb{P}(X = i) = 1 - \sum_{i=0}^{k-1} p(1-p)^i = 1 - (1 - (1-p)^k) = (1-p)^k,$$

où l'avant dernière égalité se trouve à l'aide de l'indication  $\sum_{i=0}^{k-1} x^i = \frac{1-x^k}{1-x}$ . Ainsi, on obtient que

$$\mathbb{P}(X > k) = \mathbb{P}(X \geq k+1) = (1-p)^{k+1}.$$

Donc,

$$\mathbb{P}(X > n+m \mid X \geq n) = \frac{\mathbb{P}(X > n+m)}{\mathbb{P}(X \geq n)} = \frac{(1-p)^{n+m+1}}{(1-p)^n} = (1-p)^{m+1} = \mathbb{P}(X > m).$$