Université Claude Bernard Lyon 1

MAT2072L - Probabilités discrètes et statistiques descriptives

TP 1 : probabilité

1 Python, les notebooks

Nous travaillerons sur la forge :

`https://jupyter.univ-lyon1.fr/`

Une fois connecté.e, créez un répertoire `L2.Proba.24-25`. Ouvrez l'application Anaconda et lancez Jupiter. Placez vous dans le répertoire `L2.Proba.24-25`. Créez un nouveau notebook python que vous nommerez raisonnablement (par exemple, `TP1.ipynb`). Vous pouvez commencer à écrire des commandes, puis `MAJ+ENTRÉE` pour exécuter et créer une nouvelle cellule. Testez aussi `CTRL+ENTRÉE`

Dans ce TP, nous utiliserons les bibliothèques `scipy` et `matplotlib`. Dans le TP suivant, vous serez des statisticiens avertis et nous utiliserons la bibliothèque `panda`. Pour l'instant, on démarre ainsi :

```
import numpy as np
import scipy.stats as st
import matplotlib.pyplot as plt
```

Avant d'aller plus loin, il faut ouvrir dans son navigateur internet préféré des onglets pour l'aide de `scipy` et de `matplotlib` :

`https://docs.scipy.org/doc/scipy/reference/stats.html`
`https://matplotlib.org/stable/gallery/index.html`

2 Lois usuelles discrètes

Les commandes concernant les lois de probabilité discrètes sont visibles dans l'aide de `scipy` dans la catégorie `stats`. Pour chaque loi, les méthodes à retenir sont :

— `pmf` : c'est la fonction de masse, c'est-à-dire la fonction $k \mapsto P[X = k]$
— `cdf` : c'est la fonction cumulée, c'est-à-dire la fonction de répartition $x \mapsto P[X \leq x]$

Exercice 1

1. Pour tracer le diagramme en bâtons décrivant de la loi binomiale $\mathcal{B}(10, 0.25)$, on peut utiliser les commandes suivantes :

```
x = np.arange(11)
plt.bar(x,st.binom.pmf(x,10,0.25),width=0.5)
```

2. Tracer de même un diagramme en bâtons des lois $\mathcal{B}(10, 0.5)$, $\mathcal{B}(100, 0.25)$, $\mathcal{P}(2)$, $\mathcal{P}(10)$, $\mathcal{G}(0.75)$, $\mathcal{G}(0.25)$ et de la loi uniforme sur $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

Exercice 2

Tracer la fonction de répartition de la loi $\mathcal{B}(10, 0.25)$. Tracer de même la fonction de répartition des lois $\mathcal{B}(100, 0.5)$ et $\mathcal{P}(3)$. Que valent $P(X \leq 20)$ et $P(X > 12)$ si X suit la loi $\mathcal{B}(50, 0.2)$?

Exercice 3

Rappeler le théorème de convergence de la loi binomiale vers la loi de Poisson.
Illustrer cette convergence en représentant sur un même graphique les lois $\mathcal{B}(100, 0.03)$ et $\mathcal{P}(3)$.

3 Lois usuelles continues

Exercice 4

1. Tracer la densité de la loi $\mathcal{N}(0, 1)$.

```
x=np.linspace(-4,4,1000)
pdf=st.norm.pdf(x,0,1)
plt.plot(x,pdf,label='N(0,1)')
plt.legend()
```

2. Tracer de même la densité des lois suivantes :
   (a) les lois normales $\mathcal{N}(1, 2)$ (de moyenne 1 et variance 2) et $\mathcal{N}(1, 0.5)$ (sur un même graphique) ;
   (b) la loi exponentielle $\mathcal{E}(1)$ (quelle est sa densité ?) ;
   (c) la loi de Cauchy (quelle est sa densité ?).

Exercice 5

Tracer la fonction de répartition des lois $\mathcal{N}(0, 1)$, $\mathcal{N}(-2, 1)$ et $\mathcal{E}(2)$.

Exercice 6

Pour X de loi $\mathcal{N}(0, 1)$, calculer $P(X \leq 2)$, $P(-1 \leq X \leq 0.5)$ et trouver u tel que $P(X \leq u) = 0.9$.

4 Loi des grands nombres et théorème de Moivre - Laplace

Exercice 7

Le but de cet exercice est de visualiser la loi des grands nombres. On se donne une suite de v.a. indépendantes, de même loi $(X_n)_{n\geq 1}$, et on s'intéresse au comportement asymptotique de

$$M_n := \frac{X_1 + \cdots + X_n}{n}.$$

1. Rappelez la loi faible des grands nombres.
2. On suppose que X_n suit la loi uniforme sur l'intervalle $[0, 2]$. Utiliser la commande `np.random.uniform` pour générer un tableau `x` contenant les valeurs des v.a. $(X_n)_{1\leq n\leq N}$, pour $N = 10^3$.
3. En une seule instruction, générez un tableau `y` contenant les valeurs des v.a. $(Y_n)_{1\leq n\leq N}$.
4. Visualisez le comportement de la suite $(Y_n)_{1\leq n\leq N}$ à l'aide de la commande `plt.plot(y)`. Qu'observe-t-on ?
5. Reprenez l'exercice en changeant la loi des v.a. X_n (Résultat d'un dé, jeu du Pile ou Face,...)

Exercice 8

Rappeler le théorème de Moivre - Laplace.
Illustrer cette convergence en représentant sur un même graphique les lois $\mathcal{B}(n, p)$ et la loi Normale $\mathcal{N}(np, np(1-p))$. Qu'observe-t-on lorsque $n \geq 30$, $np \geq 0.5$ et $n(1-p) \geq 0.5$?