TD 8 : lois continues

Remarque préliminaire : déterminer la loi d'une **variable aléatoire continue** X, c'est déterminer au moins l'une des choses suivantes :

(a) la *fonction de répartition*, définie par $F_X(t) = \mathbb{P}(X \leq t)$ pour tout t ;

(b) les probabilités $\mathbb{P}(a \leq X \leq b)$ pour tous réels a et b avec $a \leq b$;

(c) la densité f_X (si elle existe),

On pourra vérifier les relations suivantes, qui permettent de passer d'un item à l'autre :

- supposons connaître la fonction de répartition :
  - pour tous a et b, on a : $\mathbb{P}(a \leq X \leq b) = F_X(b) - F_X(a)$;
  - pour tout x, on a : $f_X(x) = F'_X(x)$ (là où F_X est dérivable) ;
- supposons connaître les probabilités $\mathbb{P}(a \leq X \leq b)$:
  - pour tout t, on a : $F_X(t) = \lim_{a \to -\infty} \mathbb{P}(a \leq X \leq t)$;
  - pour tout x, on a : $f_X(x) = \lim_{b \to x} \dfrac{\mathbb{P}(a \leq X \leq b) - \mathbb{P}(a \leq X \leq x)}{b - x}$ (si existence ; $a < x$ fixé) ;
- supposons connaître la densité f_X :
  - pour tout t, on a : $F_X(t) = \displaystyle\int_{-\infty}^{t} f_X(x)\,\mathrm{d}x$;
  - pour tous a et b, on a : $\mathbb{P}(a \leq X \leq b) = \displaystyle\int_{a}^{b} f_X(x)\,\mathrm{d}x$.

En général, on essaie d'exprimer les probabilités $\mathbb{P}(a \leq X \leq b)$ comme des intégrales de a à b d'une certaine fonction f : on en déduit alors facilement la fonction de répartition (c'est la limite quand $a \to -\infty$) et la densité (c'est f).

Exercice 1 Loi normale

Soit X une v.a. de loi normale $\mathcal{N}(0, 1)$. Ainsi, sa densité est définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right).$$

1. Tracer le graphe de la densité f.
2. On considère la v.a. $Y = -X$. Montrez que Y suit aussi la loi normale $\mathcal{N}(0, 1)$.
3. Donner, sans faire de calcul, $\mathbb{P}[X \leq 0]$.
4. En utilisant la table de la fonction de répartition de la loi normale $\mathcal{N}(0, 1)$, que vous trouverez à la suite des exercices, déterminer

$$\mathbb{P}[X \leq 2.2], \quad \mathbb{P}[X \geq 1{,}25], \quad \mathbb{P}[X < -1], \quad \mathbb{P}[0 \leq X \leq 2]$$

puis

$$\mathbb{P}[-1 \leq X \leq 1], \quad \mathbb{P}[-2 \leq X \leq 2], \quad \mathbb{P}[-3 \leq X \leq 3].$$

Exercice 2 Translation et changement d'échelle pour une loi normale

1. Soient $m \in \mathbb{R}$ et $\sigma \in \mathbb{R}_+^*$. Soit X une v.a. de loi normale $\mathcal{N}(m, \sigma^2)$. Quelle est la loi de $Z = \frac{X-m}{\sigma}$?
2. Soit Z une v.a. de loi $\mathcal{N}(0, 1)$. Soient deux réels a et b avec $a \neq 0$. Déterminer la loi de $Y = aZ + b$.
3. Soit X de loi $\mathcal{N}(5, \sigma^2 = 4)$. Calculer la probabilité $P[X > 4]$, grâce à la table de la fonction de répartition de la loi normale standard.

Exercice 3 Estimation d'une probabilité

Dans une fonderie, on fabrique des barres en aluminium. Le procédé de fabrication est tel que la longueur (en cm) d'une barre est distribuée selon une loi normale de paramètres $m = 2$ et $\sigma = 0{,}012$. Les limites de tolérance sont données comme étant $2{,}000 \pm 0{,}012$. Quel sera le pourcentage de pièces défectueuses ?

Exercice 4

On lance n fois une pièce de monnaie, qui tombe sur "face" avec probabilité p.

1. Modéliser cette expérience en donnant l'ensemble fondamental et construire une fonction probabilité sur cet ensemble.
2. On considère la variable aléatoire S_n qui donne le nombre de "faces" obtenus après n lancers. Précisez sa loi, son espérance et sa variance.
3. En utilisant l'inégalité de Tchebychev, majorer la probabilité de s'écarter de np de ε ou plus ; et donner l'application numérique pour $\varepsilon = 7$, $p = 1/2$ et $n = 100$.
4. Par quelle loi peut-on approcher la loi de S_n ?
5. On pose $F_n = \frac{S_n}{n}$, la variable aléatoire qui donne la proportion de "faces" après n lancers.
   (a) Calculer l'espérance et la variance de F_n.
   (b) Pour $\alpha \in [0, 1]$, soit z_α le quantile d'ordre α de la loi normale centrée réduite. En utilisant l'approximation de la question 4, déterminer un réel a tel que

   $$\mathbb{P}\big[F_n - a < p < F_n + a\big] \approx 1 - \alpha.$$

   L'intervalle $[F_n - a, F_n + a]$ est appelé *intervalle de confiance pour p au niveau de confiance $1 - \alpha$.*
6. On a effectué 100 lancers et obtenu 43 "face". On veut tester l'hypothèse que la pièce est équilibrée. Calculer l'intervalle de confiance au niveau de confiance 0.95 et conclure.

Table de la loi normale centrée réduite $\mathcal{N}(0,1)$

z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	.50000	.50399	.50798	.51197	.51595	.51994	.52392	.52790	.53188	.53586
0.1	.53983	.54380	.54776	.55172	.55567	.55962	.56356	.56750	.57142	.57535
0.2	.57926	.58317	.58706	.59095	.59483	.59871	.60257	.60642	.61026	.61409
0.3	.61791	.62172	.62552	.62930	.63307	.63683	.64058	.64431	.64803	.65173
0.4	.65542	.65910	.66276	.66640	.67003	.67364	.67724	.68082	.68439	.68793
0.5	.69146	.69497	.69847	.70194	.70540	.70884	.71226	.71566	.71904	.72240
0.6	.72575	.72907	.73237	.73565	.73891	.74215	.74537	.74857	.75175	.75490
0.7	.75804	.76115	.76424	.76730	.77035	.77337	.77637	.77935	.78230	.78524
0.8	.78814	.79103	.79389	.79673	.79955	.80234	.80511	.80785	.81057	.81327
0.9	.81594	.81859	.82121	.82381	.82639	.82894	.83147	.83398	.83646	.83891
1.0	.84134	.84375	.84614	.84850	.85083	.85314	.85543	.85769	.85993	.86214
1.1	.86433	.86650	.86864	.87076	.87286	.87493	.87698	.87900	.88100	.88298
1.2	.88493	.88686	.88877	.89065	.89251	.89435	.89617	.89796	.89973	.90147
1.3	.90320	.90490	.90658	.90824	.90988	.91149	.91309	.91466	.91621	.91774
1.4	.91924	.92073	.92220	.92364	.92507	.92647	.92786	.92922	.93056	.93189
1.5	.93319	.93448	.93574	.93699	.93822	.93943	.94062	.94179	.94295	.94408
1.6	.94520	.94630	.94738	.94845	.94950	.95053	.95154	.95254	.95352	.95449
1.7	.95543	.95637	.95728	.95818	.95907	.95994	.96080	.96164	.96246	.96327
1.8	.96407	.96485	.96562	.96638	.96712	.96784	.96856	.96926	.96995	.97062
1.9	.97128	.97193	.97257	.97320	.97381	.97441	.97500	.97558	.97615	.97670
2.0	.97725	.97778	.97831	.97882	.97932	.97982	.98030	.98077	.98124	.98169

Table 1 – Valeurs de la fonction de répartition $\Phi(z)$ de la loi normale standard (centrée réduite) $Z \sim \mathcal{N}(0,1)$, pour $0 \leq z \leq 2.09$.

0.90	0.95	0.975	0.99	0.995
1.282	1.645	1.960	2.326	2.576

Table 2 – Quantiles de la loi normale centrée réduite. La table donne les valeurs des quantiles z_p pour $p = 0.90, 0.95, 0.975, 0.99, 0.995$. Si $X \sim \mathcal{N}(0,1)$, on rappelle que z_p est tel que $\mathbb{P}(X \leq z_p) = p$.