TD 6 : lois discrètes usuelles

Cette fiche concerne la première partie du chapitre 6. Nous rappelons tout d'abord les lois usuelles.

	notation	ensemble de réalisations	$\mathbb{P}(X=k)$	espérance	variance
loi de Bernoulli	$\mathscr{B}(p)$	$k \in [\![0,1]\!]$	$p^k(1-p)^{1-k}$	p	$p(1-p)$
loi binomiale	$\mathscr{B}(n,p)$	$k \in [\![0,n]\!]$	$\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}$	np	$np(1-p)$
loi géométrique	$\mathscr{G}(p)$	$k \in \mathbb{N}^*$	$p(1-p)^{k-1}$	$\frac{1}{p}$	$\frac{1-p}{p^2}$
loi de Poisson	$\mathscr{P}(\lambda)$	$k \in \mathbb{N}$	$\exp(-\lambda)\frac{\lambda^k}{k!}$	λ	λ
loi uniforme	$\mathscr{U}\left([\![1,n]\!]\right)$	$k \in [\![1,n]\!]$	$\frac{1}{n}$	$\frac{n+1}{2}$	$\frac{n^2-1}{12}$

Exercice 1

1. Soit $p \in [0,1]$. Calculer l'espérance et la variance de la loi de Bernoulli $\mathscr{B}(p)$.
2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer l'espérance et la variance de la loi uniforme $\mathscr{U}\left([\![1,n]\!]\right)$.
3. Soit $p \in [0,1]$ et $n \in \mathbb{N}^*$. Soit X une v.a. de loi binomiale $\mathscr{B}(n,p)$. Calculer $\mathbb{E}(X)$, puis, en utilisant le théorème du transfert, $\mathbb{E}\big(X(X-1)\big)$. En déduire la variance de X.
4. Soit $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$. Soit X une v.a. de loi de Poisson $\mathscr{P}(\lambda)$. Montrer que la série de terme général $\lambda^k/(k-1)!$ est convergente. Idem pour la série de terme général $\lambda^k/(k-2)!$. Calculer ensuite $\mathbb{E}(X)$, $\mathbb{E}\big(X(X-1)\big)$ et $\mathbb{V}(X)$.

Exercice 2

Soit X une v.a. de loi géométrique $\mathscr{G}(p)$ où $p \in [0,1[$. Le but de l'exercice est de calculer l'espérance et la variance de X.

1. Quel est la rayon de convergence R de la série entière $\sum x^n$?
2. Calculer, pour $x \in]-R,R[$, sa somme $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n$.
3. Rappeler le théorème de dérivation des séries entières et dériver deux fois cette série de deux façons différentes : en dérivant terme à terme et en dérivant la somme calculée à la question précédente.
4. Choisir $x = 1-p$ et déduire de la question précédente la valeur de $\mathbb{E}(X)$ et $\mathbb{E}\big(X(X-1)\big)$.
5. Calculer à partir de ces résultats la variance de X.

Exercice 3

Soit X une v.a. discrète dont on connait la fonction de répartition F_X.

1. Rappeler la définition de F_X.
2. Soit $x \in \mathbb{R}$, un point de continuité de F_X. Que vaut $\mathbb{P}(X=x)$?

3. Soit $x \in \mathbb{R}$, un point où F_X n'est pas continue. Donne une expression simple de $\mathbb{P}(X = x)$ et $\mathbb{P}(X < x)$ en fonction de F_X.
4. Soient deux réels x et y. Donner en fonction de F_X une expression des probabilités suivantes : $\mathbb{P}(x \leq X \leq y)$, $\mathbb{P}(x \leq X < y)$, $\mathbb{P}(x < X \leq y)$, $\mathbb{P}(x < X < y)$.

Exercice 4

Fonctions de répartition, suite. Comme à l'exercice précédent, on considère une v.a. X dont on connait la fonction de répartition F_X. Cette fonction est donnée par

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0\,; \\ \frac{1}{2} & \text{si } x \in [0,1[\ ; \\ \frac{2}{3} & \text{si } x \in [1,2[\ ; \\ \frac{5}{6} & \text{si } x \in [2,3[\ ; \\ 1 & \text{si } x \geq 3. \end{cases}$$

1. Tracer le graphe de cette fonction.
2. Écrire en fonction de la fonction de répartition F_X toutes les probabilités suivantes : $\mathbb{P}(X < 1)$, $\mathbb{P}(X = 1)$, $\mathbb{P}\big(X = \frac{3}{2}\big)$, $\mathbb{P}\big(X \in]0,2]\big)$, puis les calculer.
3. Donner la loi de X (c'est-à-dire l'ensemble $X(\Omega)$ des valeurs prises par X, ainsi que les probabilités $\mathbb{P}(X = k)$ pour tout $k \in X(\Omega)$).

Exercice 5

Soit $\lambda > 0$. Pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, soit X_n une variable aléatoire de loi binomiale $\mathscr{B}(n, \lambda/n)$. Soit un entier $k \in \mathbb{N}$, fixé. Montrer que :

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(X_n = k) = \exp(-\lambda)\frac{\lambda^k}{k!}.$$

Indication. *On pourra démontrer que* $\lim_{n\to\infty}(1 - \lambda/n)^n = \exp(-\lambda)$.

Remarque. Soit X une v.a. de loi $\mathscr{B}(n,p)$. Dès que les conditions suivantes sont vérifiées : $n \geq 50$, $p \leq 0{,}1$ et $np \leq 10$, on approchera la loi de X par la loi de Poisson $\mathscr{P}(np)$, en ce sens :

$$\text{pour tout } k \in \mathbb{N}, \quad \mathbb{P}(X = k) \simeq \exp(-np)\frac{(np)^k}{k!}.$$

Exercice 6

La compagnie « La Guêpe » assure 1000 navires. Un navire a une valeur de 10 millions d'euros. La probabilité de perte d'un navire est estimée à 0,001 pour une année. Les risques de perte des navires sont indépendants.

a) On appelle X la variable aléatoire ayant pour valeur le nombre de navires perdus en une année parmi les navires assurés par « La Guêpe ». Quelle est la loi de probabilité de X (justifier) ? Par quelle loi peut-on l'approcher (justifier) ?

b) Quelle est la probabilité qu'il y ait 3 navires perdus en une année ?

c) Avec une calculatrice ou Excel ou python, calculer $\mathbb{P}(X = k)$ pour $k = 0, \ldots, 7$. Tracer le diagramme en bâtons qui représente ces probabilités et le graphe de la fonction de répartition de X.

d) Chaque fin de décembre, la compagnie « La Guêpe » règle les sinistres de l'année. À combien, au minimum, doivent s'élever ses réserves pour qu'elle puisse honorer ses engagements avec une probabilité supérieure à 0,999 ? Indication : *il faut d'abord trouver le plus petit* $n \in \mathbb{N}$ *tel que* $\mathbb{P}(X \leq n) \geq 0{,}999$.

Exercice 7

Un boulanger réalise 100 petits pains aux pépites de chocolat. Il met 800 pépites dans sa pâte. Quelle est la loi du nombre X de pépites qui se trouve dans le pain que vous achetez ? Indication : *un schéma de Bernoulli est caché dans cet énoncé. Comme X donne le nombre de pépites dans notre pain, un succès de l'épreuve de Bernoulli est donc « cette pépite est dans notre pain ».*

Combien de pépites pouvez-vous espérer avoir (en moyenne) ? Donner une loi approchée pour X avant de calculer $\mathbb{P}(5 \leq X \leq 8)$ grâce à la table de la loi de Poisson donnée ci-dessous.

Exercice 8

On lance un dé ordinaire non pipé jusqu'à obtenir 6. On note T le nombre de lancers.

1. Quelle est la loi de T ? Quelle est son espérance ?
2. Calculer $\mathbb{P}(T > k)$ pour tout $k \in \mathbb{N}$. En déduire la fonction de répartition de T, c'est-à-dire $\mathbb{P}(X \leq k)$ pour tout $k \in \mathbb{N}$. Application numérique : calculer $\mathbb{P}(2 < T < 8)$.
3. Calculer $\mathbb{P}(T > 3)$ et $\mathbb{P}(T > 10 \mid T > 7)$.
4. Généralisation : montrer que pour tous entiers positifs i et j, on a $\mathbb{P}(T > i+j \mid T > i) = \mathbb{P}(T > j)$.
5. Quel est le nombre minimal de lancers à effectuer pour que la probabilité d'obtenir au moins un 6 soit supérieure à $1/2$?