TD 5 : ensembles de probabilité dénombrables

Exercice 1

On lance deux pièces équilibrées de manière indépendante. On considère les événements suivants : A : « la première pièce donne face » ; B : « la deuxième pièce donne face » et C : « les deux pièces donnent le même résultat ». Montrer que les événements A, B et C sont indépendants deux à deux mais pas mutuellement indépendants.

Exercice 2

On considère une infinité de lancers d'un dé (équilibré à six faces) et on veut déterminer la probabilité de ne jamais obtenir le nombre 1. Pour cela, on introduit pour chaque entier n les événements :

- B : « on n'obtient jamais de 1 » ;
- A_n : « on n'obtient pas de 1 au cours des n premiers lancers ».

1. Comment écrire B à l'aide des événements A_n $(n \geq 1)$?
2. Est-ce que la suite $(A_n)_{n\geq 1}$ est une suite monotone d'événements ?
3. Pour tout entier $n \geq 1$, exprimer $\mathbb{P}(A_n)$ en fonction de n.
4. En déduire $\mathbb{P}(B)$. Que peut-on dire de l'événement B ?

Exercice 3

Soit n un entier et soient $M_1, M_2, \ldots, M_n$ des personnes qui se transmettent une information binaire (0 ou 1). La première personne, M_1, reçoit la bonne information, mettons 1. Elle la transmet à la deuxième personne M_2 et ainsi de suite jusqu'à M_n qui transmet finalement l'information. Malheureusement, à chaque fois que l'information est transmise, il y a une probabilité p que l'information soit changée en son contraire.

Pour $k \geq 1$, soient I_k l'événement « M_k a la bonne information » et $\overline{I_k}$ son complémentaire.

1. Modéliser cette expérience avec un arbre de probabilité.
2. En tenant compte du fait que deux changements rétablissent la vérité, quelle est la probabilité pour que M_3 ait le bon message ?
3. Si 1 est la bonne information, quelle est la probabilité d'observer la suite des transmissions 010110 ?
4. Soit C_i l'évènement « M_i transmet correctement l'information initiale ». On note p_i la probabilité $\mathbb{P}(C_i)$. Exprimer, pour $i \geq 2$, la probabilité p_i en fonction de p_{i-1}. En déduire p_n.
   Que se passe-t-il si $p = 0$? si $p = 1$? quand n tend vers l'infini ? Comment l'interpréter ?