TD 4 : dénombrabilité

Exercice 1

1. Comptine : 0, -1, 1, -2, 2, -3, 3, etc. Formaliser pour établir une bijection de $\mathbb{N}$ sur $\mathbb{Z}$.
2. (a) Soit n un entier naturel non nul. Démontrer qu'il existe un unique couple d'entiers naturels (a, b) tel que $n = 2^a(2b+1)$.
   (b) En déduire une bijection de $\mathbb{N}$ sur $\mathbb{N}^2$. Autrement dit, $\mathbb{N}^2$ est dénombrable.
3. (a) Soit A l'ensemble des couples (s, t) d'entiers naturels tels que $t \leq s$. Dessiner A.
   (b) Montrer que l'application suivante est une bijection et expliciter la bijection réciproque :
   $$g : \mathbb{N}^2 \longrightarrow A, \quad (m, n) \longmapsto (m+n, n).$$
   (c) Pour s entier, on note $u_s = s(s+1)/2$. Calculer $u_{s+1} - u_s$. Montrer que la suite $(u_s)_{s\in\mathbb{N}}$ est strictement croissante et en déduire que pour tout entier N, il existe un unique s tel que $u_s \leq N < u_{s+1}$.
   (d) Montrer enfin que l'application suivante est une bijection et décrire sa réciproque :
   $$h : A \longrightarrow \mathbb{N}, \quad (s, t) \longmapsto \frac{s(s+1)}{2} + t.$$
   (e) Calculer $h \circ g(m, n)$ pour m et n inférieurs à 4. *On écrira le résultat dans un tableau.*
4. Démontrer (à nouveau) que $\mathbb{Q}$ est dénombrable.
5. Soit $\mathscr{P}(\mathbb{N})$ l'ensemble des parties de $\mathbb{N}$ et soit $p : \mathbb{N} \to \mathscr{P}(\mathbb{N})$. Montrer que $F = \{x \in \mathbb{N},\ x \notin p(x)\}$ n'a pas d'antécédent. *Commencer avec* $\{1, 2, 3\}$ *à la place de* $\mathbb{N}$.

Exercice 2

Soit E un ensemble et A une partie de E.

1. Montrer que si E et A sont finis et non vides, alors $E \setminus A$ n'est pas en bijection avec E.
2. On suppose que E est dénombrable.
   (a) Montrer que si A est finie, alors $E \setminus A$ est en bijection avec E.
   (b) Vérifier que si A est infinie, tout peut arriver : $E \setminus A$ peut être en bijection avec E, ou pas.
3. On suppose que E n'est pas dénombrable. Montrer que si A est (au plus) dénombrable, alors $E \setminus A$ est en bijection avec E.

Exercice 3

Soit $\Omega = \{1, 2, 3, 4\}$. Est-ce que l'ensemble $\mathscr{T}$ est une tribu :

$$\mathscr{T} = \Big\{\emptyset, \{1\}, \{2, 3\}, \Omega\Big\} \text{ ?}$$

Exercice 4

On se place sur $\mathbb{N}^*$, l'ensemble des entiers strictement positifs. Un petit enfant apprend à compter. Iel connaît : 1, 2 et beaucoup. Proposer une tribu sur $\mathbb{N}^*$ adaptée à cette situation.

Exercice 5

Soit E un ensemble infini. On dit qu'une partie A de E est cofinie (resp. codénombrable) si son complémentaire $A^c = E \setminus A$ est fini (resp. au plus dénombrable). On dit qu'elle est au plus dénombrable si elle est finie ou dénombrable (ou, si l'on veut, en bijection avec une partie de $\mathbb{N}$).

1. Démontrer que la classe $\mathscr{F}$ formée des parties finies ou cofinies n'est pas une tribu.
2. Démontrer que la classe $\mathscr{T}$ formée des parties au plus dénombrables ou codénombrables est une tribu.