FACULTÉ des Sciences
Dpt Mathématiques

MAT2072L - Probabilités discrètes et statistiques descriptives

TD 3 : Variables aléatoires discrètes (1)

Exercice 1

On considère une variable aléatoire X à valeurs dans $\{-1, 0, 1\}$. On suppose que l'on a $\mathbb{P}(X = -1) = \mathbb{P}(X = 0) = 1/4$. Calculer $\mathbb{P}(X = 1)$, $\mathbb{E}(X)$ et $\mathbb{E}(X^2)$.

Exercice 2

On lance 3 fois une pièce de monnaie. On s'intéresse au nombre de FACE obtenu. Notons X ce nombre.

1. Modéliser l'expérience (déterminer Ω et $\mathbb{P}$).
2. Quel est le support $X(\Omega)$ de X, c'est-à-dire l'ensemble des valeurs prises par X ? Décrire la fonction X complètement (on pourra aussi tracer le diagramme).
3. Calculer $\mathbb{P}(X = k)$ pour chaque $k \in X(\Omega)$. Comment s'appelle la loi de X ? Faire une représentation graphique de la loi de X.
4. Calculer l'espérance et la variance de X.
5. Déterminer la loi $Y = X + 5$. Tracer une représentation graphique de la loi de Y. Quelles sont l'espérance et la variance de Y ?
6. Déterminer la loi $Z = 2X$. Tracer une représentation graphique de la loi de Z. Quelles sont l'espérance et la variance de Z ?

Exercice 3

On lance 25 fois un dé. Modéliser l'expérience. Quelle est la loi du nombre X de 5 obtenus ?

Exercice 4

On cherche à estimer le nombre de poissons dans un lac. Pour ce faire, on pêche tout d'abord 50 poissons qu'on marque au moyen d'une petite bague avant de les relâcher. On revient plusieurs jours après et on pêche à nouveau 20 poissons. Soit X le nombre de poissons marqués parmi ces 20 poissons.

Modéliser l'expérience. Quelle est la loi de X ?

Exercice 5

1. On possède deux pièces truquées différentes, la première obtient face avec probabilité p, la seconde avec probabilité q. On lance ces deux pièces successivement.
   (a) Décrire l'ensemble Ω et construire une probabilité sur Ω (liée à la situation !).
   (b) Quelle est la probabilité d'obtenir au moins une fois face ?
2. Deux archers tirent sur n cibles, une flèche par cible et par archer. Le premier touche avec probabilité p, le second avec probabilité q.

(a) Décrire l'ensemble Ω et construire une probabilité sur Ω.

(b) Quelle est la probabilité que k cibles au moins soient touchées ?

Exercice 6

Soient X et Y deux variables aléatoires réelles discrètes dont la loi de probabilité conjointe est donnée par le tableau suivant.

$X\backslash Y$	0	1	2
0	1/9	2/9	0
1	2/9	???	1/9
2	1/9	1/9	1/9

1. Calculer la probabilité de l'événement $(X, Y) = (1, 1)$.
2. Calculer les lois marginales de X et de Y.
3. Les variables aléatoires X et Y sont-elles indépendantes ?
4. Calculer la covariance de X et Y.
5. Calculer la loi de probabilité, l'espérance et la variance de $Z = X + Y$. Est-ce que l'espérance de Z est la somme des espérances de X et Y ? Et pour la variance ?
6. Montrer que, pour toutes variables aléatoires X et Y, telles que $\mathbb{E}[X^2] < +\infty$ et $\mathbb{E}[Y^2] < +\infty$, on a :

$$\mathbb{V}[X + Y] = \mathbb{V}[X] + \mathbb{V}[Y] + 2\,\mathrm{Cov}(X, Y)$$

Exercice 7

On lance deux dés : un rouge et un vert. Soit X le résultat du dé rouge et Y celui du dé vert.

1. Calculer la loi de la v.a. $Z = X + Y$.
2. Est-ce que X et Z sont indépendantes ?
3. Calculer la covariance du couple X et Z.

Exercice 8

Une urne contient une boule blanche et une boule noire. On prend dans cette urne une boule au hasard, on la remet et on ajoute une boule de la même couleur.

1. Quelle est la loi du nombre de boules blanches à l'issue de cette opération ?
2. On répète ce petit jeu plusieurs fois. Notons B_n le nombre de boules blanches et N_n le nombre de boules noires présentes dans l'urne après $n - 1$ répétitions. Montrer par récurrence sur n que pour tout $k \in \{1, \ldots, n\}$,

$$\mathbb{P}(B_n = k) = \frac{1}{n}$$

(justifier soigneusement les calculs). De quelle loi s'agit-il ?