FACULTÉ des Sciences
Dpt Mathématiques

TD 2 : Ensembles de probabilité finis

Exercice 1

Soit A et B deux événements tels que $\mathbb{P}(A) = 0{,}3$ et $\mathbb{P}(A \cup B) = 0{,}5$. Trouver $\mathbb{P}(B)$ quand :

(a) A et B sont indépendants ;

(b) A et B sont incompatibles ;

(c) $\mathbb{P}(A \mid B) = 0{,}1$;

(d) $\mathbb{P}(B \mid A) = 0{,}4$.

Exercice 2

On lance deux dés. Le premier est vert et le second est bleu.

1. Écrire Ω.
2. Construire une probabilité sur Ω, c'est-à-dire, donner la probabilité $\mathbb{P}(\omega)$ pour tout $\omega \in \Omega$.
3. Soit A l'événement *le dé bleu donne un nombre exactement deux fois plus grand que le dé vert.* Décrire A puis calculer sa probabilité.
4. Soit B l'événement *le maximum des deux dés vaut 4*. Décrire B puis calculer sa probabilité.

Exercice 3

Voici deux paris soumis par le Chevalier de Méré à Pascal.

Pari 1. On jette 4 fois un dé à six faces, Méré gagne si l'on obtient au moins un 6.

Pari 2. On jette 24 fois deux dés à six faces, Méré gagne si on obtient au moins un double 6.

Méré avait fait fortune grâce au premier pari et pensait qu'il avait plus d'une chance sur deux de gagner le deuxième pari également.

1. Modéliser soigneusement la première expérience aléatoire : « on jette 4 fois un dé ». Expliciter Ω, l'ensemble des événements élémentaires, et la probabilité de chacun de ces événements élémentaires.
2. On considère l'événement A : « on n'obtient pas de 6 ». Énumérer les événements élémentaires qui constituent A.
3. Calculer la probabilité de A et conclure sur le premier pari.
4. Le chevalier de Méré avait-il raison à propos du second pari ? (Justifier.)

Exercice 4

Un nouveau vaccin a été testé sur 12 500 personnes ; 75 d'entre elles, dont 35 femmes enceintes, ont eu des réactions secondaires nécessitant une hospitalisation. Parmi les 12 500 personnes testées, 680 personnes sont des femmes enceintes. On souhaite comparer les risques liés au vaccin, suivant qu'on est une femme enceinte ou non.

On peut modéliser ainsi ce problème :

— expérience aléatoire : on pioche une personne *au hasard* dans la population étudiée ;
— univers : $\Omega = [\![1, 12\,500]\!]$;
— probabilité : $\mathbb{P}$ est la probabilité uniforme sur Ω (chaque individu a la même probabilité d'être piochée) : $\mathbb{P}(\omega) = 1/12\,500$ pour tout $\omega \in \Omega$. On peut en déduire que, pour tout $A \subset \Omega$,

$$\mathbb{P}(A) = \sum_{\omega \in A} \mathbb{P}(\omega) = \frac{|A|}{12\,500}.$$

1. Quelle est la probabilité pour une femme enceinte, d'avoir une réaction secondaire si elle reçoit un vaccin ?
2. Quelle est la probabilité pour une personne non enceinte d'avoir une réaction secondaire ?

Conclure.

Exercice 5

Pour se rendre à la Doua, une étudiante a le choix entre quatre itinéraires : A, B, C et D. La probabilité qu'elle choisisse A (respectivement B, C) est $1/3$ (respectivement $1/4$, $1/12$). La probabilité d'arriver en retard en empruntant le chemin A (respectivement B, C) est $1/20$ (resp. $1/10$, $1/5$). En empruntant le chemin D elle n'est jamais en retard.

1. Proposer un ensemble fondamental Ω qui décrivent tous ces événements.
2. Écrire plusieurs systèmes complets d'événements possibles.
3. Calculer la probabilité que l'étudiante arrive en retard.
4. Un jour donné, l'étudiante est en retard. Quelle est la probabilité qu'elle ait emprunté l'itinéraire C ?

Exercice 6

Une urne contient des boules numérotées de 1 à 20. On tire sans remise trois boules de l'urne.

1. Décrire l'ensemble Ω et construire une probabilité sur Ω.
2. Quelle est la probabilité qu'au moins une boule ait un numéro supérieur ou égal à 17 ?
3. Quelle est la probabilité d'obtenir des numéros en ordre croissant ?
4. Quelle est la probabilité d'obtenir des numéros successifs en ordre croissant ?