FACULTÉ des Sciences
Dpt Mathématiques

MAT2072L - Probabilités discrètes et statistiques descriptives

TD 1 : Dénombrements

Nous manipulerons des ensembles. Rappelons les règles de base : pour tous ensembles A, B et C,

— distributivité : $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$, $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$;

— complémentaire : $\overline{(A \cup B)} = \overline{A} \cap \overline{B}$, $\overline{(A \cap B)} = \overline{A} \cup \overline{B}$
(ici, on suppose que A, B et C sont des parties d'un même ensemble E et $\overline{A} = E \setminus A$ désigne le complémentaire de A, etc.).

Plus généralement, pour toute famille d'ensembles $(A_i)_{i \in \mathbb{N}}$ et tout ensemble B, on a :

$$\Big(\bigcup_{i\in\mathbb{N}} A_i\Big) \cap B = \bigcup_{i\in\mathbb{N}} (A_i \cap B), \qquad \Big(\bigcap_{i\in\mathbb{N}} A_i\Big) \cup B = \bigcap_{i\in\mathbb{N}} (A_i \cup B),$$

$$\overline{\Big(\bigcup_{i\in\mathbb{N}} A_i\Big)} = \bigcap_{i\in\mathbb{N}} \overline{A_i}, \qquad \overline{\Big(\bigcap_{i\in\mathbb{N}} A_i\Big)} = \bigcup_{i\in\mathbb{N}} \overline{A_i}$$

(où les A_i sont supposés être des parties d'un ensemble E et la barre désigne le complémentaire).

Exercice 1

Soient A, B, C des ensembles finis.

1. En écrivant $A \cup B$ comme réunion d'ensembles disjoints, montrer que
$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|.$$
2. En déduire que
$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - \Big(|A \cap B| + |A \cap C| + |B \cap C|\Big) + |A \cap B \cap C|.$$

Exercice 2

Soit $\Omega = \{a, b, c\}$ (avec a, b et c distincts). Donner :

1. l'ensemble $\mathscr{P}(\Omega)$ des parties de Ω ;
2. l'ensemble des arrangements de Ω ;
3. l'ensemble des permutations de Ω ;
4. l'ensemble des combinaisons de Ω ;
5. l'ensemble des arrangements avec répétitions d'ordre (3,2,1) de Ω
(NB : on répète a trois fois, b deux fois et c une fois).

Exercice 3

1. Les dix touches numériques d'un téléphone permettent de composer le code PIN, formé de quatre chiffres. Écrire l'ensemble de tous les codes que l'on peut former. Combien de codes différents peut-on former ?
2. Le mot de passe d'un ordinateur est composé de six lettres minuscules (on utilise l'alphabet latin sans accent qui contient 26 lettres). Écrire l'ensemble de tous les mots de passe différents. Quel est son cardinal ?

Exercice 4

Le clavier de neuf touches dessiné ci-dessous permet de composer le code d'entrée d'un immeuble, à l'aide d'une lettre suivie d'un nombre de trois chiffres distincts ou non.

$$\begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ A & B & C \end{array}$$

Pour chacune des questions suivantes, précisez l'ensemble considéré.

1. Combien de codes différents peut-on former ?
2. Combien y a-t-il de codes sans le chiffre 1 ?
3. Combien y a-t-il de codes comportant au moins une fois le chiffre 1 ?
4. Combien y a-t-il de codes comportant des chiffres distincts ?

Exercice 5

Quatre moutons et deux loups s'assoient sur un banc. Pour chaque question, on calculera le nombre de dispositions en distinguant les animaux par leur prénom (ex. : Benta, Billy, Dolly, Cupcake ; Alpha, Totem) et en ne conservant que l'information de leur espèce (ex. : L-M-M-L-M-M).

1. Quel est le nombre de dispositions possibles ?
2. Même question si les moutons sont d'un coté et les loups de l'autre.
3. Même question si chaque loup est intercalé entre deux moutons.
4. Même question si les loups veulent rester l'un à côté de l'autre.

Exercice 6

L'équipe de football d'un grand club européen compte 2 Algériens, 1 Espagnol, 2 Français, 4 Italiens et 2 Ivoiriens. En supposant que la feuille de match, numérotée de 1 à 11, ne mentionne que les nationalités des joueurs, donner le nombre de feuilles de match possibles.

Exercice 7

Calculer le nombre de mots de sept lettres (ayant un sens ou pas) que l'on peut fabriquer avec les lettres du mot ETRENNE. Même question avec les lettres de ENTENTE. Quels sont ces objets mathématiques que nous dénombrons dans cet exercice ?

Exercice 8

1. On répartit p serviettes dans n tiroirs numérotés de 1 à n. Calculer le nombre de ces répartitions selon que l'on considère :
   (a) que les serviettes sont toutes discernables ;
   (b) que les serviettes sont toutes identiques.
2. Un fabriquant de bonbons produit des sachets contenant 10 bonbons, choisis parmi 3 sortes possibles (fraise, framboise et citron). Combien de sachets différents peut-il proposer ?

Exercice 9

1. Étant donnés deux entiers positifs n et k avec $k \leq n-1$, montrer la relation du triangle de Pascal :
$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}.$$
(mener le calcul d'une part, raisonner *dénombrement* d'autre part)
2. Démontrer le binôme de Newton
$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}. \tag{B_n}$$
3. Pour $k \leq n$, montrer la relation d'absorption :
$$k\binom{n}{k} = n\binom{n-1}{k-1}.$$
En déduire la valeur de
$$\sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k}.$$

Exercice 10

1. Montrer que pour tout entier naturel non nul n,
$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}(-1)^k = 0.$$
2. Montrer l'identité de Vandermonde : pour $m, n \geq 1$ et $0 \leq k \leq m+n$,
$$\sum_{j=0}^{k} \binom{m}{j}\binom{n}{k-j} = \binom{n+m}{k}$$
Deux méthodes : développer de deux façons $(1+t)^m(1+t)^n$, ou raisonner *dénombrement.*
3. Étant donnés deux entiers $n \geq 1$ et $0 \leq k \leq n$, montrer que
$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 = \binom{2n}{n}.$$