

Université Claude Bernard Lyon 1
Licence de mathématiques – L2 mathématiques
Probabilités discrètes et statistiques descriptives
Contrôle terminal – 17 mai 2024

*Durée : 120 minutes. L'énoncé comporte **deux pages**. Le barème est indicatif.
Calculatrices, téléphones, ordinateurs et documents interdits.
Une table de la loi normale centrée réduite est fournie.
La notation tiendra compte du soin apporté à la rédaction des réponses.*

Exercice 1. (5 points)

Dans une ville opèrent deux compagnies de taxis : les Verts possèdent 85% de la flotte totale, et les Bleus, les 15% restants. Un accident survient la nuit et le véhicule impliqué quitte la scène. Un témoin affirme qu'il s'agissait d'un taxi Bleu. Des tests ont montré que, dans des conditions analogues à celles de l'accident, les témoins identifient correctement la couleur du taxi dans 80% des cas, et se trompent dans 20% des cas.

- (1) Définir précisément tous les événements liés à cette expérience aléatoire. Lister toutes les probabilités données dans l'énoncé.
- (2) Déterminer la probabilité que le témoin de l'accident affirme que le taxi responsable était Bleu.
- (3) Déterminer la probabilité que le taxi responsable soit effectivement Bleu. Peut-on en déduire que la parole du témoin est crédible ?

Exercice 2. (5 points)

Soit X une variable aléatoire suivant la loi de Poisson $\mathcal{P}(\lambda)$ avec $\lambda > 0$ et soit Y une variable aléatoire suivant la loi géométrique $\mathcal{G}(p)$ avec $p \in]0, 1[$.

- (1) Rappeler le support, la fonction de masse et l'espérance de X .
- (2) Rappeler le support, la fonction de masse de Y et calculer son espérance.
- (3) Si $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$, montrer que $\mathbb{P}(\ll X \text{ est impair} \gg) < \mathbb{P}(\ll X \text{ est pair} \gg)$.
- (4) Étudier une propriété analogue pour $Y \sim \mathcal{G}(p)$.

Exercice 3. (5 points)

- (1) On lance 3 fois un dé non truqué à six faces de façon indépendante. Modéliser cette expérience par un espace probabilisé (Ω, \mathbb{P}) .
- (2) Calculer la probabilité des événements suivants :
 - (a) On obtient 3 fois 6.
 - (b) On obtient 6 au premier jet, puis 2 fois un résultat entre 1 et 5.
 - (c) On obtient une fois 6 et 2 fois un résultat entre 1 et 5 (dans n'importe quel ordre).
- (3) On lance un dé non pipé jusqu'à obtenir un 6. Modéliser cette expérience par un espace probabilisé (Ω, \mathbb{P}) . Quelle est la probabilité de l'évènement N : « la face 6 n'est jamais obtenue » ?

Exercice 4. (5 points)

Pour *harmoniser* les notes d'un examen, on suppose que les notes suivent une loi normale d'espérance μ et d'écart-type σ , qui sont inconnus. On souhaite admettre (sans oral) 15,87% des candidats et ajourner 6,67% des candidats. Un candidat passant un examen est ajourné si sa note est inférieure à 7, passe un oral si sa note est comprise entre 7 et 12, est admis sans oral si sa note est supérieure à 12.

- 1) Calculer la probabilité pour qu'un candidat passe l'oral.
- 2) On considère la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite (voir la table ci-après)

$$F(x) = \int_{-\infty}^x \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{u^2}{2}} du \quad (x \in \mathbb{R}).$$

Trouver la valeur approchée de α , β au centième près tels que

$$F(\alpha) = 0,8413, \quad F(\beta) = 0,9333.$$

- 3) En déduire que $\mu = 10$ et $\sigma = 2$.
- 4) Calculer la probabilité qu'un candidat ait une note supérieure à 15.
- 5) On considère 500 candidats choisis au hasard. Calculer la probabilité pour qu'aucun candidat ait une note supérieure à 15.
- 6) On considère un ensemble de 600 candidats choisis au hasard. Quelle est la probabilité que le nombre de candidats admis sans oral soit supérieur à 100 ?

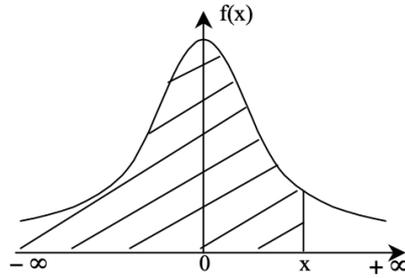
Indication : Si X est une variable aléatoire suivant la loi binomiale $\mathcal{B}(n, p)$ avec $0 < p < 1$, alors $\mathbb{E}(X) = np$ et $\mathbb{V}(X) = np(1 - p)$. La loi binomiale $\mathcal{B}(n, p)$ peut être approchée par la loi de Poisson lorsque $n \geq 50$ et $np \leq 10$, par la loi normale lorsque $n \geq 50$ et $np > 15$ et $n(1 - p) > 15$. On a

$$e^{-3} \simeq 0.050, \quad e^{-3,1} \simeq 0,045, \quad e^{-3,2} \simeq 0,041;$$
$$\sqrt{600 \times 0.0667 \times (1 - 0.0667)} \simeq 6.11, \quad \sqrt{600 \times 0.1587 \times (1 - 0.1587)} \simeq 8.95.$$



Loi Normale centrée réduite

Probabilité de trouver une valeur inférieure à x.



$$F(x) = \int_{-\infty}^x \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{u^2}{2}} du$$

X	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190	0,7224
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517	0,7549
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823	0,7852
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0,8106	0,8133
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365	0,8389
1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599	0,8621
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,8810	0,8830
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	0,8997	0,9015
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	0,9162	0,9177
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292	0,9306	0,9319
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	0,9429	0,9441
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525	0,9535	0,9545
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616	0,9625	0,9633
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693	0,9699	0,9706
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	0,9756	0,9761	0,9767
2,0	0,9772	0,9778	0,9783	0,9788	0,9793	0,9798	0,9803	0,9808	0,9812	0,9817
2,1	0,9821	0,9826	0,9830	0,9834	0,9838	0,9842	0,9846	0,9850	0,9854	0,9857
2,2	0,9861	0,9864	0,9868	0,9871	0,9875	0,9878	0,9881	0,9884	0,9887	0,9890
2,3	0,9893	0,9896	0,9898	0,9901	0,9904	0,9906	0,9909	0,9911	0,9913	0,9916
2,4	0,9918	0,9920	0,9922	0,9925	0,9927	0,9929	0,9931	0,9932	0,9934	0,9936
2,5	0,9938	0,9940	0,9941	0,9943	0,9945	0,9946	0,9948	0,9949	0,9951	0,9952
2,6	0,9953	0,9955	0,9956	0,9957	0,9959	0,9960	0,9961	0,9962	0,9963	0,9964
2,7	0,9965	0,9966	0,9967	0,9968	0,9969	0,9970	0,9971	0,9972	0,9973	0,9974
2,8	0,9974	0,9975	0,9976	0,9977	0,9977	0,9978	0,9979	0,9979	0,9980	0,9981
2,9	0,9981	0,9982	0,9982	0,9983	0,9984	0,9984	0,9985	0,9985	0,9986	0,9986
3,0	0,9987	0,9987	0,9987	0,9988	0,9988	0,9989	0,9989	0,9989	0,9990	0,9990
3,1	0,9990	0,9991	0,9991	0,9991	0,9992	0,9992	0,9992	0,9992	0,9993	0,9993
3,2	0,9993	0,9993	0,9994	0,9994	0,9994	0,9994	0,9994	0,9995	0,9995	0,9995
3,3	0,9995	0,9995	0,9995	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9997
3,4	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9998
3,5	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998

Table pour les grandes valeurs de x :

x	3	3,2	3,4	3,6	3,8	4	4,2	4,4	4,6	4,8
F(x)	0,99865003	0,99931280	0,99966302	0,99984085	0,99992763	0,99996831	0,99998665	0,99999458	0,99999789	0,99999921