Contrôle terminal (Corrigé)– 17 mai 2024

Exercice 1. ($5 = 2 + 1,5 + 1,5$ points)
Dans une ville opèrent deux compagnies de taxis : les Verts possèdent 85% de la flotte totale, et les Bleus, les 15% restants. Un accident survient la nuit et le véhicule impliqué quitte la scène. Un témoin affirme qu'il s'agissait d'un taxi Bleu. Des tests ont montré que, dans des conditions analogues à celles de l'accident, les témoins identifient correctement la couleur du taxi dans 80% des cas, et se trompent dans 20% des cas.

1. Définir précisément tous les évènements liés à cette expérience aléatoire. Lister toutes les probabilités données dans l'énoncé.
2. Déterminer la probabilité que le témoin de l'accident affirme que le taxi responsable était Bleu.
3. Déterminer la probabilité que le taxi responsable soit effectivement Bleu. Peut-on en déduire que la parole du témoin est crédible ?

1. Notons B, V, PB et PV les évènements suivants :
   - B : le taxi est un Bleu
   - V : le taxi est un Vert
   - PB : le témoin affirme que le taxi est un Bleu
   - PV : le témoin affirme que le taxi est un Vert.

   D'après l'énoncé du problème, $\mathbb{P}(\mathrm{B}) = 0,15$ et $\mathbb{P}(\mathrm{V}) = 0,85$,
$$\mathbb{P}(\mathrm{PB}|\mathrm{B}) = \mathbb{P}(\mathrm{PV}|\mathrm{V}) = 0,80, \quad \mathbb{P}(\mathrm{PB}|\mathrm{V}) = \mathbb{P}(\mathrm{PV}|\mathrm{B}) = 0,20.$$
2. En utilisant la formule des probabilités totales on a
$$\mathbb{P}(\mathrm{PB}) = \mathbb{P}(\mathrm{B}) \times \mathbb{P}(\mathrm{PB}|\mathrm{B}) + \mathbb{P}(\mathrm{V}) \times \mathbb{P}(\mathrm{PB}|V) = (0,15 \times 0,8) + (0,85 \times 0,2) = 0,29$$
3. D'après la formule de Bayes, on a
$$\mathbb{P}(\mathrm{B}|\mathrm{PB}) = \frac{\mathbb{P}(\mathrm{B}) \times \mathbb{P}(\mathrm{PB}|\mathrm{B})}{\mathbb{P}(\mathrm{PB})} = \frac{0,15 \times 0,8}{0,29} = 0,414.$$
   Le calcul montre que le témoinage du témoin n'est pas crédible.

Exercice 2. ($5 = 0,5 + 1,5 + 1,5 + 1,5$ points)
Soit X une variable aléatoire suivant la loi de Poisson $\mathscr{P}(\lambda)$ avec $\lambda > 0$ et soit Y une variable aléatoire suivant la loi géométrique $\mathscr{G}(p)$ avec $p \in]0, 1[$.

1. Rappeler le support, la fonction de masse et l'espérance de X.
2. Rappeler le support, la fonction de masse de Y et calculer son espérance.
3. Si $X \sim \mathscr{P}(\lambda)$, montrer que $\mathbb{P}(\ll X \text{ est impair} \gg) < \mathbb{P}(\ll X \text{ est pair} \gg)$.
4. Étudier une propriété analogue pour $Y \sim \mathscr{G}(p)$.

1. Le support de X est $\mathbb{N}$ avec la fonction de masse $\mathbb{P}(X = k) = e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}$, $\forall k \in \mathbb{N}$ et l'espérance $\mathbb{E}(X) = \lambda$.
2. Le support de Y est $\mathbb{N}^*$ avec la fonction de masse $\mathbb{P}(Y = k) = q^{k-1}p$ où $q = 1 - p$, $\forall k \in \mathbb{N}^*$ et l'espérance se calcule par la formule
$$\mathbb{E}(X) = \sum_{k\geq 1} kq^{k-1}p = p\frac{d}{dq}\left(\sum_{k\geq 1} q^k\right) = p\frac{d}{dq}\left(\frac{q}{1-q}\right) = p \cdot \frac{1}{p^2} = \frac{1}{p}.$$

3. Un calcul immédiat donne

$$\mathbb{P}\{\text{X est pair}\} = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}\{X = 2n\} = e^{-\lambda} \sum_{n\geq 0} \frac{\lambda^{2n}}{(2n)!} = \frac{e^{\lambda}+e^{-\lambda}}{2} e^{-\lambda} = \frac{1+e^{-2\lambda}}{2},$$

$$\mathbb{P}\{\text{X est impair}\} = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}\{X = 2n+1\} = e^{-\lambda} \sum_{n\geq 0} \frac{\lambda^{2n+1}}{(2n+1)!} = \frac{e^{\lambda}-e^{-\lambda}}{2} e^{-\lambda} = \frac{1-e^{-2\lambda}}{2}.$$

La différence des deux probabilités est $\mathbb{P}\{\text{X est pair}\} - \mathbb{P}\{\text{X est impair}\} = e^{-2\lambda} > 0$.
N.B. On peut aussi procéder comme suit : de l'identité

$$\sum_{n\geq 0} \frac{\lambda^{2n}}{(2n)!} - \sum_{n\geq 0} \frac{\lambda^{2n+1}}{(2n+1)!} = \sum_{n\geq 0} (-1)^n \frac{\lambda^n}{n!} = e^{-\lambda}$$

on tire $\mathbb{P}\{\text{X est pair}\} - \mathbb{P}\{\text{X est impair}\} = e^{-\lambda} \cdot e^{-\lambda} = e^{-2\lambda} > 0$.

4. Soit $Y \sim \mathscr{G}(p)$. En notant $q = 1-p$, on a

$$\mathbb{P}(\text{Y est pair}) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}\{Y = 2n\} = \sum_{n=1}^{\infty} pq^{2n-1} = \frac{pq}{1-p^2} = \frac{1-p}{2-p},$$

tandis que

$$\mathbb{P}(\text{Y est impair}) = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}\{Y = 2n+1\} = \sum_{n=0}^{\infty} pq^{2n} = \frac{p}{1-q^2} = \frac{1}{2-p},$$

c'est-à-dire que

$$\mathbb{P}(\text{Y est pair}) = (1-p)\mathbb{P}(\text{Y est impair}) < \mathbb{P}(\text{ Y est impair}).$$

Donc cette fois il y a plus de chances d'obtenir un résultat impair qu'un résultat pair.

Exercice 3. $((5 = 1+3+1$ points)
On lance 3 fois un dé non truqué à six faces de façon indépendante.

1. Modéliser cette expérience par un espace probabilisé $(\Omega, \mathbb{P})$.
2. Calculer la probabilité des évènements suivants :
   (a) On obtient 3 fois 6.
   (b) On obtient 6 au premier jet, puis 2 fois un résultat entre 1 et 5.
   (c) On obtient une fois 6 et 2 fois un résultat entre 1 et 5 (dans n'importe quel ordre).
3. On lance un dé non pipé jusqu'à obtenir un 6. Modéliser cette expérience par un espace probabilisé $(\Omega, \mathbb{P})$. Quelle est la probablité de l'évènement N :« la face 6 n'est jamais obtenue » ?

1. On prend pour ensemble des réalisations $\Omega = \{1, \ldots, 6\}^3$ mini de la probabilité uniforme $\mathbb{P}$, c'est-à-dire,

$$\mathbb{P}(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{|A|}{6^3}, \qquad \forall A \in \mathscr{P}(\Omega).$$

2(a) L'évènement "On obtient 3 fois 6" est représenté par le sous-ensemble

$$A = \{(6,6,6)\} \in \mathscr{P}(\Omega),$$

ce qui donne

$$\mathbb{P}(A) = \frac{1}{6} \times \frac{1}{6} \times \frac{1}{6} = \frac{1}{6^3} = 0,0046.$$

(b) L'évènement "On obtient 6 au premier jet, puis 2 fois un résultat entre 1 et 5" est représenté par le sous-ensemble

$$A = \{\{(6, i, j)\} : i, j \in \{1, \dots, 5\}\},$$

ce qui donne

$$\mathbb{P}(A) = \frac{1}{6} \times \frac{5}{6} \times \frac{5}{6} = \frac{25}{6^3} = 0,1157.$$

(c) L'évènement "On obtient une fois 6 et 2 fois un résultat entre 1 et 5 " est représenté par le sous-ensemble

$$A = \{\{(6, i, j)\} : 1 \leq i, j \leq 5\} \cup \{\{(i, 6, j)\} : 1 \leq i, j \leq 5\} \cup \{\{(i, j, 6)\} : 1 \leq i, j \leq 5\},$$

ce qui donne

$$\mathbb{P}(A) = 3 \times \frac{25}{216} = \frac{25}{6^3} = 0,3472.$$

3. On enregistre l'évènement « la face 6 est obtenue au k-ième lancer »par $k \in \mathbb{N}^*$ et l'évènement « la face 6 n'est jamais obtenue »par N. Donc on peut modéliser les résultats de l'expérience par $\Omega = \mathbb{N}^* \cup \{\mathrm{N}\}$. Notons $p = 1/6$ et $q = 5/6$. Alors

$$\mathbb{P}(\text{« la face 6 est obtenue au } k\text{-ième lancer »}) = q^{k-1}p, \quad \forall k \in \mathbb{N}^*.$$

De $\mathbb{P}(\Omega) = 1$ on tire

$$1 = \sum_{k \geq 1} q^{k-1}p + \mathbb{P}(\mathrm{N}) = 1 + \mathbb{P}(\mathrm{N}),$$

et puis $\mathbb{P}(\mathrm{N}) = 0$.

Exercice 4. $(5 = 1 + 1 + 1 + 1 + 0,5 + 0,5)$
Pour *harmoniser* les notes d'un examen, on suppose que les notes suivent une loi normale d'espérance μ et d'écart-type σ, qui sont inconnus. On souhaite admettre (sans oral) $15,87\%$ des candidats et ajourner $6,67\%$ des candidats. Un candidat passant un examen est ajourné si sa note est inférieure à 7, passe un oral si sa note est comprise entre 7 et 12, est admis sans oral si sa note est supérieure à 12.

1) Calculer la probabilité pour qu'un candidat passe l'oral.
2) On considère la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite (voir la table ci-après)

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{u^2}{2}} du.$$

Trouver la valeur approchée de α, β au centième près tels que

$$F(\alpha) = 0,8413, \quad F(\beta) = 0,9333.$$

3) En déduire que $\mu = 10$ et $\sigma = 2$.
4) Calculer la probabilité qu'un candidat ait une note supérieure à 15.
5) On considère 500 candidats choisis au hasard. Calculer la probabilité pour qu'aucun candidat ait une note supérieure à 15.
6) On considère un ensemble de 600 candidats choisis au hasard. Quelle est la probabilité que le nombre de candidats admis sans oral soit supérieur à 100 ?

Indication : Si X est une variable aléatoire suivant la loi binomiale $\mathscr{B}(n,p)$ avec $0<p<1$, alors $\mathbb{E}(X)=np$ et $\mathbb{V}(X)=np(1-p)$. La loi binomiale $\mathscr{B}(n,p)$ peut être approchée par la loi de Poisson lorsque $n\geq 50$ et $np\leq 10$, par la loi normale lorsque $n\geq 50$ et $np>15$ et $n(1-p)>15$. On a

$$e^{-3}\simeq 0.050,\quad e^{-3,1}\simeq 0,045,\quad e^{-3,2}\simeq 0,041;$$
$$\sqrt{600\times 0.0667\times(1-0.0667)}\simeq 6.11,\quad \sqrt{600\times 0.1587\times(1-0.1587)}\simeq 8.95.$$

Soit X la note d'un candidat. Alors $X\sim\mathscr{N}(\mu,\sigma)$.

1) Par l'hypothèse, un candidat passe un oral si sa note est dans l'intervalle $[7,\ 12]$. Donc

$$\mathbb{P}[7\leq X\leq 12]=1-\mathbb{P}[x>12]-\mathbb{P}[X\leq 7]=1-0,1587-0,0667=0,7746.$$

2) On cherche la valeur approchée de α, β au centième près tels que

$$F(\alpha)=0,8413,\quad F(\beta)=0,9333.$$

La table numérique indique que $\alpha=1,00$ et $1,50<\beta<1,51$. Donc $\beta=1,50$ au centième près.

3) Soit $Z=\frac{X-\mu}{\sigma}$. Alors $Z\sim\mathscr{N}(0,1)$. Par l'hypothèse on a

$$\mathbb{P}\left[Z>\frac{12-\mu}{\sigma}\right]=0,1587\quad\text{et}\quad\mathbb{P}\left[Z<\frac{7-\mu}{\sigma}\right]=0,0667.$$

Comme $\mathbb{P}[Z\leq 0]=0,5$ et $0,0667<0,5$, on déduit que $\frac{7-\mu}{\sigma}<0$. Donc

$$\mathbb{P}\left[Z<\frac{7-\mu}{\sigma}\right]=\mathbb{P}\left[Z>\frac{\mu-7}{\sigma}\right]=1-\mathbb{P}\left[Z\leq\frac{\mu-7}{\sigma}\right],$$

par la table de la loi normale centrée réduite, on a

$$\frac{12-\mu}{\sigma}=F^{-1}(1-0,1587)=F^{-1}(0,8413)=1,$$
$$\frac{\mu-7}{\sigma}=F^{-1}(1-0,0667)=F^{-1}(0,9333)=1,5.$$

En le résolvant on trouve que $\sigma=2$ et $\mu=10$.

4) Soit $Z=\frac{X-10}{2}\sim\mathscr{N}(0,1)$. Alors $\mathbb{P}[X>15]=\mathbb{P}\left[Z>\frac{15-10}{2}\right]=1-\mathbb{P}[Z\leq 2,5]=1-0,9938=0,0062$.

5) Si on note Y le nombre de candidats parmi les 500 choisis au hasard ayant une note supérieure à 15. Alors $Y\sim\mathscr{B}(500,p)$ avec $p=0,0062$. Comme $n\geq 50$ et $np=500\times 0,0062=3,1$, on peut approcher la loi binomiale par la loi de Poisson $\mathscr{P}(\lambda)$ avec $\lambda=3,1$ et

$$\mathbb{P}(Y=0)=(1-p)^{500}\simeq e^{-3,1}\simeq 0,045.$$

6) Soit Y le nombre de candidats parmi les 600 choisis au hasard ayant une note supérieure à 12. Alors $Y\sim\mathscr{B}(600,p)$ avec $p=0,1587$. Comme $n=600>50$, $np=95,22>15$ et $n(1-p)=600-95,22>15$, on peut approcher la loi de Y par la loi normale $\mathscr{N}(np,\sqrt{np(1-p)})$ avec $np=95,22$ et $\sqrt{np(1-p)}\simeq 8.95$. Soit $T=\frac{Y-np}{\sqrt{np(1-p)}}\sim\mathscr{N}(0,1)$. Alors

$$\mathbb{P}[Y>100]=\mathbb{P}\left[T>\frac{100-95,22}{8.95}\right]=1-\mathbb{P}[T\leq 0,5341]=1-0,7019=0,2981.$$