Université Claude Bernard Lyon 1
Licence de mathématiques – L2 mathématiques
Probabilités discrètes et statistiques descriptives

Contrôle Continu – 18 mars 2024

Durée : 90 minutes. L'énoncé comporte ***deux pages****.*
Calculatrices, téléphones, ordinateurs et documents interdits.

Exercice 1. (3 points) Questions de cours

a. Énoncer la définition d'une probabilité sur un ensemble fini Ω.

b. Énoncer le théorème de transfert sur un espace de probabilité fini.

Réponse.

1. Une probabilité sur un ensemble fini Ω est une application P définie de l'ensemble des parties $\mathscr{P}(\Omega)$ vers $[0, 1]$ telle que :
   (a) $P(\Omega) = 1$;
   (b) si A et B sont des parties disjointes de Ω, alors $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$.
   (NB : En prenant $A = B = \emptyset$, on en déduit que $P(\emptyset) = 0$.)
2. Soit (Ω, P) un espace probabilisé fini et soit $X : \Omega \to \mathbb{R}$ une variable aléatoire (c'est-à-dire une fonction) et $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une autre fonction. On note $\{x_i,\ i \in I\}$ l'ensemble des valeurs prises par X, et $\{y_i,\ i \in I\}$ l'ensemble des valeurs prises par $h(X) := h \circ X$. Par définition, l'espérance de $h(X)$ est
$$E(h(X)) = \sum_{i \in I} P\big(\{h(X) = y_i\}\big) y_i,$$
   où $\{h(X) = y_i\} = \big\{\omega \in \Omega \ : \ h(X(\omega)) = y_i\big\}$ pour tout $i \in I$. Le théorème de transfert affirme que
$$E(h(X)) = \sum_{i \in I} P\big(\{X = x_i\}\big) h(x_i),$$
   où $\{X = x_i\} = \big\{\omega \in \Omega \ : \ X(\omega) = x_i\big\}$ pour tout $i \in I$.
   On peut le comparer à la définition de l'espérance de X (qui correspond au cas $h(x) = x$) :
$$E(X) = \sum_{i \in I} P\big(\{X = x_i\}\big) x_i.$$

Exercice 2. (2 points)

Un ensemble de 10 pages comprend 2 pages coloriées en rouge, 3 pages coloriées en vert et 5 pages blanches.

On considère que les pages de même couleur sont toutes indiscernables et on les range en ligne au hasard sur la table.

1. Calculer le nombre de dispositions des pages sur la table.
2. Calculer le nombre de dispositions de ces 10 pages qui alternent une page coloriée et une page blanche (sans contrainte sur la couleur de la première page).

Réponse.

1. Il s'agit des arrangements avec répétitions d'ordre $(5, 3, 2)$, dont le nombre est :

$$\frac{(5+3+2)!}{5!3!2!} = \frac{10 \times 9 \times 8 \times 7 \times 6}{6 \times 2} = 10 \times 9 \times 4 \times 7 = 2520.$$

2. Une disposition alternée commence soit par une feuille blanche (B), soit par une feuille colorée (C), c'est-à-dire qu'elle est de la forme $BCBCBCBCBC$ ou $CBCBCBCBCB$. Dans chaque cas, la disposition des feuilles colorées est un arrangement avec répétitions d'ordre $(3, 2)$, il y en a $5!/(3! \cdot 2!)$. Au total, le nombre de dispositions alternées est :

$$2 \times \frac{5!}{3!2!} = \frac{2 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2}{3 \times 2 \times 2} = 5 \times 4 = 20.$$

Exercice 3. (7 points) Deux étudiants choisissent au hasard (et indépendamment) chacun un code PIN formé de 4 chiffres DISTINCTS (parmi les dix chiffres de 0 à 9 ; par exemple : 1493 et 9163).

1. Quel est l'espace des réalisations Ω et la probabilité P sur Ω correspondant à l'expérience ?
2. Quelle est la probabilité que les deux étudiants aient choisi le même code ?
3. Quelle est la probabilité que les deux codes commencent par le même chiffre ? (Exemple : 1493 et 1695.)
4. Quelle est la probabilité que les deux codes commencent et se terminent par les mêmes chiffres ? (Exemple : 1493 et 1693 ou encore 2493 et 2683.)
5. Quelle est la probabilité que les chiffres d'au moins un des codes soient tous impairs ?

Réponse.

1. Un code PIN est un quadruplet (a, b, c, d), ou, pour simplifier, $abcd$, formé de chiffres distincts : c'est une application de $\{1, 2, 3, 4\}$ (indice qui donnne la position du chiffre) vers l'ensemble des chiffres $\{0, 1, \ldots, 9\}$ (l'image de 1 est a, celle de 2 est b, etc.), qui est injective puisqu'un chiffre ne peut pas être répété. Autrement dit, c'est un arrangement de 4 chiffres de $\{0, \ldots, 9\}$. Il y en a

$$N = \mathsf{A}_{10}^4 = 10 \times 9 \times 8 \times 7 = 5040.$$

Une réalisation est un couple de tels arrangements : Ω est l'ensemble des couples (C_1, C_2) où C_1 et C_2 sont des arrangements de 4 éléments parmi les 10 chiffres $\{0, \ldots, 9\}$.

Faute d'informations plus précises [1], on munit Ω de la probabilité uniforme. Le cardinal d'un singleton est $\frac{1}{|\Omega|} = \frac{1}{N^2}$.

2. L'événement A : « les deux étudiants ont choisi le même code » est l'ensemble des couples (C, C), où C parcourt l'ensemble des arrangements. Le cardinal de A est $N = \mathsf{A}_{10}^4$ et sa probabilité est :

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{N}{N^2} = \frac{1}{5040}.$$

1. Il est pourtant plausible que le code « 1234 » sera plus souvent choisi que d'autres...

3. L'événement B : « les deux codes commencent par le même chiffre » est l'ensemble des couples $(abcd, ab'c'd')$.

   Choisissons le premier chiffre $a \in \{0, \ldots, 9\}$. Un code $abcd$ est déterminé par un arrangement des trois chiffres bcd à choisir dans $\{0, \ldots, 9\} \setminus \{a\}$: il y en a A_9^3 ; idem pour les codes $ab'c'd'$. Le nombre de couples de codes qui commencent par a est donc $\left(\mathsf{A}_9^3\right)^2$, indépendant de a, et la probabilité de B est :

$$P(B) = \frac{|B|}{|\Omega|} = \frac{10 \times \left(\mathsf{A}_9^3\right)^2}{N^2} = \frac{10 \times (9 \times 8 \times 7)^2}{(10 \times 9 \times 8 \times 7)^2} = \frac{1}{10},$$

   ce qui n'est pas fait pour nous surprendre.

4. L'événément C : « les deux codes commencent et finissent par les mêmes chiffres » est l'ensemble des couples de codes $(abcd, ab'c'd)$.

   Fixons a et d (différents). le nombre de couples (a, d) est le nombre d'arrangement de 2 chiffres parmi 10, c'est-à-dire A_{10}^2. Les couples de codes de C qui commencent par a et finissent par d sont déterminés par les couples de couples $\big((b, c), (b', c')\big)$ de chiffres distincts et différents de a et d : ce sont donc des arrangements de 2 éléments de $\{0, \ldots, 9\} \setminus \{a, d\}$: il y a A_8^2 couples (b, c) et autant de couples (b', c'). Comme ce nombre est indépendant de a et d, le cardinal de C est : $\mathrm{A}_{10}^2 \cdot \left(\mathsf{A}_8^2\right)^2$ et sa probabilité est :

$$P(C) = \frac{|C|}{|\Omega|} = \frac{\mathrm{A}_{10}^2 \cdot \left(\mathsf{A}_8^2\right)^2}{\left(\mathsf{A}_{10}^4\right)^2} = \frac{10 \times 9 \times (8 \times 7)^2}{(10 \times 9 \times 8 \times 7)^2} = \frac{1}{10 \times 9} = \frac{1}{90}.$$

   Cela ne nous étonnera pas beaucoup non plus...

5. Soit D l'événement : « les chiffres d'au moins un des codes sont tous impairs ». On note D_1 (resp. D_2) l'événement : « tous les chiffres du premier (resp. second) code sont impairs ». Ainsi, $D = D_1 \cup D_2$.

   Un code PIN impair est un arrangement de 4 chiffres choisis parmi $\{1, 3, 5, 7, 9\}$. Il y en a $\mathsf{A}_5^4 = \frac{5!}{1!} = 120$. Un élément de D_1 ou D_2 est formé d'un PIN impair et d'un PIN quelconque. Le cardinal de D_1, comme de D_2, est donc $120N$. L'intersection $D_1 \cap D_2$ est formée des couples de codes impairs, il y en a 120^2. Ainsi :

$$P(D) = \frac{|D_1 \cup D_2|}{|\Omega|} = \frac{|D_1| + |D_2| - |D_1 \cap D_2|}{|\Omega|} = \frac{2 \times 120N - 120^2}{N^2} = \frac{83}{1764} \simeq 0{,}0471.$$

Exercice 4. (5 points) Un joueur dispose d'un dé et d'une pièce. Le dé est équilibré et la pièce a une probabilité p $(0 < p < 1)$ de tomber sur pile. Le joueur lance d'abord le dé, puis lance la pièce autant de fois que le résultat du dé. Il compte enfin le nombre de piles obtenu au cours des lancers. Les résultats de chaque lancer sont indépendants. On note $q = 1 - p$. On note également D la variable aléatoire correspondant à la valeur du dé et X celle correspondant au nombre de piles obtenus à la fin du jeu.

1. Soit $(i, j) \in \{1, \ldots, 6\}^2$. Que vaut $P(X = j \,|\, D = i)$?
2. Calculer $P(X = 6)$ et $P(X = 4)$.
3. Montrer que

$$P(X = 0) = \frac{q}{6}\left(\frac{1 - q^6}{1 - q}\right).$$

4. Sachant que le joueur n'a obtenu aucun pile au cours des lancers, quelle était la probabilité que le résultat du dé était 1 ? En déduire que lorsque $p = q$, cette quantité est strictement supérieure à $\frac{1}{2}$.

Réponse.

1. La loi de X sachant que le résultat du dé est i correspond exactement à la loi Binomiale de paramètre i et p. On a donc si $j > i$, $P(X = j \,|\, D = i) = 0$ et si $j \leq i$,
$$P(X = j \,|\, D = i) = \binom{i}{j} p^j q^{i-j}.$$
2. Par la formule des probabilités totales, on en déduit :
$$\begin{aligned} P(X = 6) &= \sum_{i=1}^{6} P(X = 6 \,|\, D = i) P(D = i) \\ &= P(X = 6 \,|\, D = 6) P(D = 6) \\ &= \frac{1}{6} p^6 \end{aligned}$$
et
$$\begin{aligned} P(X = 4) &= \sum_{i=1}^{6} P(X = 4 \,|\, D = i) P(D = i) \\ &= P(X = 4 \,|\, D = 4) P(D = 4) + P(X = 4 \,|\, D = 5) P(D = 5) \\ &+ P(X = 4 \,|\, D = 6) P(D = 6) \\ &= \frac{1}{6} p^4 (1 + 5q + 15q^2) \end{aligned}$$
3.
$$\begin{aligned} P(X = 0) &= \sum_{i=1}^{6} P(X = 0 \,|\, D = i) P(D = i) \\ &= \frac{1}{6} \sum_{i=1}^{6} q^i \\ &= \frac{q}{6} \left(\frac{1 - q^6}{1 - q} \right). \end{aligned}$$
4. On utilise ici la formule de Bayes :
$$\begin{aligned} P(D = 1 \,|\, X = 0) &= \frac{P(X = 0 \,|\, D = 1) P(D = 1)}{P(X = 0)} \\ &= \frac{\frac{q}{6}}{\frac{q}{6} \left(\frac{1 - q^6}{1 - q} \right)} \\ &= \frac{1 - q^6}{1 - q} \end{aligned}$$
Dans le cas $p = \frac{1}{2}$, on trouve
$$P(D = 1 \,|\, X = 0) = \frac{2^5}{2^6 - 1} > \frac{1}{2}.$$

Exercice 5. (5 points)

Soient X et Y deux variables aléatoires telles que la loi du couple (X, Y) est donnée par le tableau suivant :

$X\backslash Y$	0	1	2	3
1	0.1	0.2	0.1	0.1
2	0.1	0	0	0.1
3	0.1	0	0.1	0.1

1. Calculer la probabilité $P(X = Y)$.
2. Déterminer les lois de X et de Y.
3. Calculer l'espérance et la variance de X.
4. Les variables aléatoires X et Y sont-elles indépendantes ?
5. Déterminer la loi de $Z = X + Y$.

Réponse.

1. On a
$$\{X = Y\} = \bigcup_{i=1}^{3}(\{X = i\} \cap \{Y = i\}).$$
L'union est disjointe donc
$$P(X = Y) = \sum_{i=1}^{3} P(X = i, Y = i) = 0.2 + 0 + 0.1 = 0.3.$$
2. Pour déterminer la loi de X, il faut calculer $P(X = i)$ pour $i = 1, 2, 3$. On a
$$P(X = 1) = 0.5, P(X = 2) = 0.2, P(X = 3) = 0.3.$$
De même, $P(Y = 0) = P(Y = 3) = 0.3$ et $P(Y = 1) = P(Y = 2) = 0.2$.
3. $$E(X) = 1.P(X = 1) + 2P(X = 2) + 3P(X = 3) = 1.8$$
$$E(X^2) = 1^2.P(X = 1) + 2^2P(X = 2) + 3^2P(X = 3) = 4$$
D'où,
$$Var(X) = E(X^2) - E(X)^2 = 0.76.$$
4. Non, on a par exemple
$$0 = P(X = 2, Y = 1) \neq P(X = 2)P(Y = 1).$$
5. Le support de Z est $\{1, \ldots, 6\}$. Pour tout $k \in Z(\Omega)$,
$$\{Z = k\} = \bigcup_{(i,j)\in(X,Y)(\Omega):i+j=k} (\{X = i\} \cap \{Y = j\}).$$
L'union est disjointe, donc
$$P(Z = k) = \sum_{(i,j)\in(X,Y)(\Omega):i+j=k} P(X = i, Y = j).$$
En utilisant le tableau, on obtient
$$P(Z = 1) = 0.1, P(Z = 2) = 0.3, P(Z = 3) = 0.2,$$
$$P(Z = 4) = 0.1, P(Z = 5) = 0.2, P(Z = 6) = 0.1.$$