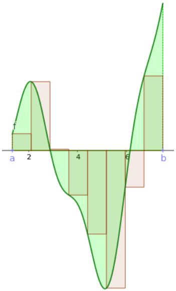
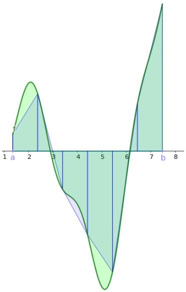
Analyse 3
Sommes de Riemann et introduction au calcul numérique d'une intégrale

Illustrations sur Geogebra

https://www.geogebra.org/m/vrhckdsd





I Sommes de Riemann – 1° Théorème

Considérons une fonction intégrable $f : [a, b] \to \mathbb{R}$.
Soit $n \geq 1$,

- $x_0, \ldots, x_n$ une subdivision régulière de $[a, b]$ ($\forall k$, $x_k = a + k\frac{b-a}{n}$),
- et $\alpha_0, \ldots, \alpha_{n-1}$, n points de $[a, b]$ tels que $\forall k$, $\alpha_k \in [x_k, x_{k+1}]$

alors

$$S_n = \frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f(\alpha_k) \xrightarrow[n \to +\infty]{} \int_a^b f(t)\mathrm{d}t.$$

I Sommes de Riemann – 1° Théorème

Considérons une fonction intégrable $f : [a, b] \to \mathbb{R}$.
Soit $n \geq 1$,

- $x_0, \ldots, x_n$ une subdivision régulière de $[a, b]$ ($\forall k$, $x_k = a + k\frac{b-a}{n}$),
- et $\alpha_0, \ldots, \alpha_{n-1}$, n points de $[a, b]$ tels que $\forall k$, $\alpha_k \in [x_k, x_{k+1}]$

alors

$$S_n = \frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f(\alpha_k) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_a^b f(t)\mathrm{d}t.$$

En particulier,

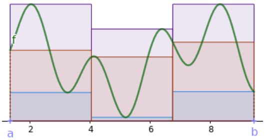
$$\frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(a + k\frac{b-a}{n}\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_a^b f(t)\mathrm{d}t$$

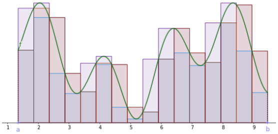
et

$$\frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^{n} f\left(a + k\frac{b-a}{n}\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_a^b f(t)\mathrm{d}t.$$

I Sommes de Riemann – 2° Preuve

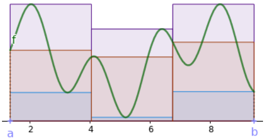
- On admettra le résultat dans le cas général.
- Dans le cas où f est continue, on peut démontrer le résultat en revenant sur la preuve de l'intégrabilité de f.

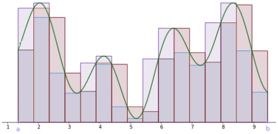




I Sommes de Riemann – 2º Preuve

- On admettra le résultat dans le cas général.
- Dans le cas où f est continue, on peut démontrer le résultat en revenant sur la preuve de l'intégrabilité de f.





- Dans le cas où f est C^1 sur $[a, b]$, on obtient une majoration théorique de l'erreur

$$\left| \int_a^b f(t)\mathrm{d}t - \frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f(\alpha_k) \right| \leq M_1 \frac{(b-a)^2}{2n}$$

où $M_1 = \max\limits_{t\in[a,b]} |f'(t)|$.

II Intégration numérique – 1° Formules de quadrature

Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue (ou même C^1, C^2 ou plus régulière).

On cherche à approcher $I = \displaystyle\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$ par une somme S_n de la forme

$$\sum_{k=0}^{n-1} \omega_k f(\alpha_k)$$

où n est un entier ≥ 1, les ω_k sont des réels (poids de pondération) et les α_k des points du segment $[a, b]$.

II Intégration numérique – 1° Formules de quadrature

Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue (ou même C^1, C^2 ou plus régulière).

On cherche à approcher $I = \displaystyle\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$ par une somme S_n de la forme

$$\sum_{k=0}^{n-1} \omega_k f(\alpha_k)$$

où n est un entier ≥ 1, les ω_k sont des réels (poids de pondération) et les α_k des points du segment $[a, b]$.

- *Il s'agit alors d'estimer l'erreur d'approximation $E_n = |S_n - I|$ suivant la formule de quadrature et la régularité de f.*

II Intégration numérique – 1º Formules de quadrature

Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue (ou même C^1, C^2 ou plus régulière).

On cherche à approcher $I = \displaystyle\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$ par une somme S_n de la forme

$$\sum_{k=0}^{n-1} \omega_k f(\alpha_k)$$

où n est un entier ≥ 1, les ω_k sont des réels (poids de pondération) et les α_k des points du segment $[a, b]$.

- *Il s'agit alors d'estimer l'erreur d'approximation $E_n = |S_n - I|$ suivant la formule de quadrature et la régularité de f.*
- **Remarque :** les sommes de Riemann sont des formules de quadrature.

II Intégration numérique – 2º Méthode des rectangles

On considère une subdivision régulière $x_0, \ldots, x_n$ de $[a, b]$ et on pose $\omega_0 = \ldots = \omega_{n-1} = \frac{b-a}{n}$. On obtient ainsi les formules de quadrature suivantes :

- $S_n = \frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f(x_k)$ **(méthode des rectangles à gauche)**
  ici pour chaque $k \in \{0, \ldots, n-1\}$, *on a posé* $\alpha_k = x_k$ *;*
- $S_n = \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^{n} f(x_k)$ **(méthode des rectangles à droite)**
  ici pour chaque $k \in \{0, \ldots, n-1\}$, *on a posé* $\alpha_k = x_{k+1}$ *;*
- $S_n = \frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{x_k + x_{k+1}}{2}\right)$ **(méthode des rectangles au milieu)**
  ici pour chaque $k \in \{0, \ldots, n-1\}$, *on a posé* $\alpha_k = \frac{x_k + x_{k+1}}{2}$.

II Intégration numérique – 2º Méthode des rectangles

On considère une subdivision régulière $x_0, \ldots, x_n$ de $[a, b]$ et on pose $\omega_0 = \ldots = \omega_{n-1} = \frac{b-a}{n}$. On obtient ainsi les formules de quadrature suivantes :

- $S_n = \frac{b-a}{n} \sum\limits_{k=0}^{n-1} f(x_k)$ **(méthode des rectangles à gauche)**
  ici pour chaque $k \in \{0, \ldots, n-1\}$, on a posé $\alpha_k = x_k$;
- $S_n = \frac{b-a}{n} \sum\limits_{k=1}^{n} f(x_k)$ **(méthode des rectangles à droite)**
  ici pour chaque $k \in \{0, \ldots, n-1\}$, on a posé $\alpha_k = x_{k+1}$;
- $S_n = \frac{b-a}{n} \sum\limits_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{x_k + x_{k+1}}{2}\right)$ **(méthode des rectangles au milieu)**
  ici pour chaque $k \in \{0, \ldots, n-1\}$, on a posé $\alpha_k = \frac{x_k + x_{k+1}}{2}$.

Dans le cas où f est C^1, on a vu précédemment que pour ces trois méthodes l'erreur $E_n = O\left(\frac{1}{n}\right)$.
On obtient mieux pour celle des rectangles au milieu si f est C^2.

II Intégration numérique – 3º Rectangles au milieu

Supposons f de classe C^2 sur $[a, b]$ et notons $M_2 = \max\limits_{t\in[a,b]} |f''(t)|$.

Pour chaque k, on utilise Taylor-Lagrange sur $[x_k, x_{k+1}]$ en $\alpha_k = \frac{x_k+x_{k+1}}{2}$: pour $t \in [x_k, x_{k+1}]$, il existe $\zeta_t \in [x_k, x_{k+1}]$ tel que

$$f(t) = f(\alpha_k) + f'(\alpha_k)(t - \alpha_k) + \frac{f''(\zeta_t)}{2}(t - \alpha_k)^2.$$

Comme $\displaystyle\int_{x_k}^{x_{k+1}} (t - \alpha_k)\mathrm{d}t = 0$, on obtient ainsi

$$\int_{x_k}^{x_{k+1}} f(t)\mathrm{d}t = (x_{k+1} - x_k)f(\alpha_k) + \int_{x_k}^{x_{k+1}} \frac{f''(\zeta_t)}{2}(t - \alpha_k)^2\mathrm{d}t$$

D'où

$$\left|\int_{x_k}^{x_{k+1}} f(t)\mathrm{d}t - \frac{b-a}{n}f(\alpha_k)\right| \leq \int_{x_k}^{x_{k+1}} \frac{|f''(\zeta_t)|}{2}(t - \alpha_k)^2\mathrm{d}t$$

$$\leq \frac{M_2}{2}\int_{x_k}^{x_{k+1}} (t - \alpha_k)^2\mathrm{d}t \leq \frac{M_2}{2} \times \frac{1}{3} \times 2\left(\frac{b-a}{2n}\right)^3 = \frac{M_2(b-a)^3}{24n^3}.$$

II Intégration numérique – 3º Rectangles au milieu

Ainsi

$$\begin{aligned}
E_n &= \left| \int_a^b f(t)\mathrm{d}t - \frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{x_k + x_{k+1}}{2}\right) \right| \\
&= \left| \sum_{k=0}^{n-1} \left(\int_{x_k}^{x_{k+1}} f(t)\mathrm{d}t - \frac{b-a}{n} f(\alpha_k) \right) \right| \\
&\leq \sum_{k=0}^{n-1} \left| \int_{x_k}^{x_{k+1}} f(t)\mathrm{d}t - \frac{b-a}{n} f(\alpha_k) \right| \\
&\leq n \times \frac{M_2(b-a)^3}{24n^3} \\
&\leq \frac{M_2(b-a)^3}{24} \times \frac{1}{n^2}
\end{aligned}$$

donc

$$E_n = O\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

II Intégration numérique – 3° Rectangles au milieu

Ainsi

$$\begin{aligned}
E_n &= \left| \int_a^b f(t)\mathrm{d}t - \frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{x_k + x_{k+1}}{2}\right) \right| \\
&= \left| \sum_{k=0}^{n-1} \left(\int_{x_k}^{x_{k+1}} f(t)\mathrm{d}t - \frac{b-a}{n} f(\alpha_k) \right) \right| \\
&\leq \sum_{k=0}^{n-1} \left| \int_{x_k}^{x_{k+1}} f(t)\mathrm{d}t - \frac{b-a}{n} f(\alpha_k) \right| \\
&\leq n \times \frac{M_2(b-a)^3}{24n^3} \\
&\leq \frac{M_2(b-a)^3}{24} \times \frac{1}{n^2}
\end{aligned}$$

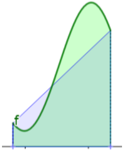
donc

$$E_n = O\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

II Intégration numérique – 4° Méthode des trapèzes

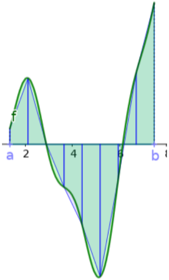
On considère toujours une subdivision régulière $x_0, \ldots, x_n$ de $[a, b]$ et on approxime l'intégrale sur chaque intervalle $[x_k, x_{k+1}]$ par l'aire

du trapèze valant $\dfrac{b-a}{n} \times \dfrac{f(x_k) + f(x_{k+1})}{2}$



On obtient ainsi la formule de quadrature

$$S_n = \frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f(x_k) + f(x_{k+1})}{2}.$$



Si f est C^2, $E_n = O\left(\frac{1}{n^2}\right)$ (voir TP/TD).

III Interpolation de Lagrange – 1° Polynôme d'interpolation

Théorème

Fixons un entier $d \geq 0$ et deux réels $a < b$.
Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ et $\alpha_0, \ldots, \alpha_d$, $d + 1$ points distincts de $[a, b]$.
Alors il existe un unique polynôme P de degré au plus d (polynôme d'interpolation de Lagrange) tel que pour tout $i \in \{0, \ldots, d\}$, on ait $P(\alpha_i) = f(\alpha_i)$.

III Interpolation de Lagrange – 1° Polynôme d'interpolation

Théorème

Fixons un entier $d \geq 0$ et deux réels $a < b$.
Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ et $\alpha_0, \ldots, \alpha_d$, $d + 1$ points distincts de $[a, b]$.
Alors il existe un unique polynôme P de degré au plus d (polynôme d'interpolation de Lagrange) tel que pour tout $i \in \{0, \ldots, d\}$, on ait $P(\alpha_i) = f(\alpha_i)$.

Preuve

- Unicité : si Q est un second polynôme de degré au plus d interpolant f en les mêmes points, alors $P - Q$ a au moins $d + 1$ racines distinctes (les α_i) et $\deg(P - Q) \leq d$, d'où $P - Q = 0$.

III Interpolation de Lagrange – 1° Polynôme d'interpolation

Théorème

Fixons un entier $d \geq 0$ et deux réels $a < b$.
Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ et $\alpha_0, \ldots, \alpha_d$, $d+1$ points distincts de $[a, b]$.
Alors il existe un unique polynôme P de degré au plus d (polynôme d'interpolation de Lagrange) tel que pour tout $i \in \{0, \ldots, d\}$, on ait $P(\alpha_i) = f(\alpha_i)$.

Preuve

- Unicité : si Q est un second polynôme de degré au plus d interpolant f en les mêmes points, alors $P - Q$ a au moins $d+1$ racines distinctes (les α_i) et $\deg(P - Q) \leq d$, d'où $P - Q = 0$.
- Existence : posons pour $i \in \{0, \ldots, d\}$, $L_i = \prod_{j \neq i} \frac{X - \alpha_j}{\alpha_i - \alpha_j}$.

  Notons que pour tout $i \neq j$, on a $L_i(\alpha_i) = 1$ et $L_i(\alpha_j) = 0$.

  Posons alors $P = \sum_{i=0}^{d} f(\alpha_i) L_i$. Pour chaque j, $P(\alpha_j) = f(\alpha_j)$ et $\deg P \leq d$.

III Interpolation de Lagrange – 2º Méthodes simples

Supposons $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ intégrable. Pour P polynôme d'interpolation de Lagrange de f en les points $\alpha_0, \ldots, \alpha_d$ de $[a, b]$, on cherche à approcher $\int_a^b f(t) \mathrm{d}t$ par $\int_a^b P(t) \mathrm{d}t$.

Comme $P = \sum_{i=0}^{d} f(\alpha_i) L_i$, on obtient la formule de quadrature

$$\sum_{i=0}^{d} \omega_i f(\alpha_i) \text{ où } \omega_i = \int_a^b L_i(t) \mathrm{d}t.$$

III Interpolation de Lagrange – 2° Méthodes simples

Supposons $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ intégrable. Pour P polynôme d'interpolation de Lagrange de f en les points α_0,...,α_d de $[a, b]$, on cherche à approcher $\displaystyle\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$ par $\displaystyle\int_a^b P(t)\mathrm{d}t$.

Comme $P = \displaystyle\sum_{i=0}^{d} f(\alpha_i)L_i$, on obtient la formule de quadrature

$$\sum_{i=0}^{d} \omega_i f(\alpha_i) \text{ où } \omega_i = \int_a^b L_i(t)\mathrm{d}t.$$

Phénomène de Runge : même avec des fonctions très régulières (par exemple avec $x \mapsto \frac{1}{1+x^2}$), l'augmentation du nombre de points d'interpolation ne constitue pas nécessairement une stratégie adéquate d'approximation.

III Interpolation de Lagrange – 3° Nœuds équidistribués

Pour la suite, on considère systématiquement des polynômes d'interpolation en $d+1$ nœuds équidistribués sur le segment considéré.

- Cas du segment $[0,1]$. Ici pour chaque i, $\alpha_i = \frac{i}{d}$. On réservera pour la suite les notations L_0, L_1, ...,L_d pour la base de Lagrange en ces points et ω_0, ω_1,...,ω_d pour les valeurs de leurs intégrales sur $[0,1]$.

III Interpolation de Lagrange – 3° Nœuds équidistribués

Pour la suite, on considère systématiquement des polynômes d'interpolation en $d+1$ nœuds équidistribués sur le segment considéré.

- Cas du segment $[0,1]$. Ici pour chaque i, $\alpha_i = \frac{i}{d}$. On réservera pour la suite les notations L_0, L_1, ...,L_d pour la base de Lagrange en ces points et ω_0, ω_1,...,ω_d pour les valeurs de leurs intégrales sur $[0,1]$.
  - si $d=1$, on a $\omega_0 = \omega_1 = \frac{1}{2}$ (à vérifier en exo)
  - si $d=2$, on a $\omega_0 = \omega_2 = \frac{1}{6}$ et $\omega_1 = \frac{2}{3}$ (également à vérifier en exo)

III Interpolation de Lagrange – 3° Nœuds équidistribués

Pour la suite, on considère systématiquement des polynômes d'interpolation en $d+1$ nœuds équidistribués sur le segment considéré.

- Cas du segment $[0,1]$. Ici pour chaque i, $\alpha_i = \frac{i}{d}$. On réservera pour la suite les notations L_0, L_1, …,L_d pour la base de Lagrange en ces points et ω_0, ω_1,…,ω_d pour les valeurs de leurs intégrales sur $[0,1]$.
  - si $d=1$, on a $\omega_0 = \omega_1 = \frac{1}{2}$ (à vérifier en exo)
  - si $d=2$, on a $\omega_0 = \omega_2 = \frac{1}{6}$ et $\omega_1 = \frac{2}{3}$ (également à vérifier en exo)

  On a toujours $\displaystyle\sum_{i=0}^{d} \omega_i = 1$. (Il suffit de remarquer que $L_0 + L_1 + \ldots + L_d = 1$)
- Cas du segment $[a,b]$. Ici pour chaque i, $\alpha_i = a + i\frac{b-a}{d}$. On peut alors vérifier (exo en TP/TD), que les poids correspondants valent $(b-a)\omega_0$, $(b-a)\omega_1$,…,$(b-a)\omega_d$.

  La méthode simple donne alors comme formule de quadrature :
  - pour $d=1$, $(b-a)\dfrac{f(a)+f(b)}{2}$;
  - pour $d=2$, $\dfrac{b-a}{6}\left[f(a) + 4f\left(\dfrac{a+b}{2}\right) + f(b)\right]$.

III Interpolation de Lagrange – 4° Méthodes composites

À $d \geq 1$ fixé, on considère $x_0, \ldots, x_n$ une subdivision régulière de $[a, b]$ et on approxime l'intégrale sur chaque intervalle $[x_k, x_{k+1}]$ par l'intégrale du polynôme interpolateur en les $d+1$ nœuds équidistribués sur ce sous-intervalle.

On obtient ainsi la formule de quadrature

$$S_n = \frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{i=0}^{d} \omega_i \, f\left(x_k + i\frac{x_{k+1}-x_k}{d}\right).$$

III Interpolation de Lagrange – 4° Méthodes composites

À $d \geq 1$ fixé, on considère $x_0, \ldots, x_n$ une subdivision régulière de $[a, b]$ et on approxime l'intégrale sur chaque intervalle $[x_k, x_{k+1}]$ par l'intégrale du polynôme interpolateur en les $d+1$ nœuds équidistribués sur ce sous-intervalle.
On obtient ainsi la formule de quadrature

$$S_n = \frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{i=0}^{d} \omega_i \, f\left(x_k + i\frac{x_{k+1}-x_k}{d}\right).$$

- Pour $d = 1$, méthode des trapèzes :

$$S_n = \frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f(x_k) + f(x_{k+1})}{2}.$$

- pour $d = 2$, méthode de Simpson :

$$S_n = \frac{b-a}{6n} \sum_{k=0}^{n-1} \left[f(x_k) + 4f\left(\frac{x_k + x_{k+1}}{2}\right) + f(x_{k+1}) \right].$$

III Interpolation de Lagrange – 4° Méthodes composites

Si $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ est intégrable alors

$$S_n = \frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{i=0}^{d} \omega_i \, f\left(x_k + i\frac{x_{k+1} - x_k}{d}\right) \xrightarrow[n \to +\infty]{} \int_a^b f(t)\mathrm{d}t.$$

III Interpolation de Lagrange – 4° Méthodes composites

Si $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ est intégrable alors

$$S_n = \frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{i=0}^{d} \omega_i \, f\left(x_k + i\frac{x_{k+1}-x_k}{d}\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_a^b f(t)\mathrm{d}t.$$

En effet :

$$S_n = \sum_{i=0}^{d} \omega_i \left[\frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(x_k + i\frac{x_{k+1}-x_k}{d}\right)\right].$$

Pour chaque i fixé, les sommes de Riemann

$$\frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(x_k + i\frac{x_{k+1}-x_k}{d}\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_a^b f(t)\mathrm{d}t.$$

III Interpolation de Lagrange – 4° Méthodes composites

Si $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ est intégrable alors

$$S_n = \frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{i=0}^{d} \omega_i \; f\left(x_k + i\frac{x_{k+1} - x_k}{d}\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_a^b f(t)\mathrm{d}t.$$

En effet :

$$S_n = \sum_{i=0}^{d} \omega_i \left[\frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(x_k + i\frac{x_{k+1} - x_k}{d}\right)\right].$$

Pour chaque i fixé, les sommes de Riemann

$$\frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(x_k + i\frac{x_{k+1} - x_k}{d}\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_a^b f(t)\mathrm{d}t.$$

Ainsi

$$\sum_{i=0}^{d} \omega_i \left[\frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(x_k + i\frac{x_{k+1} - x_k}{d}\right)\right] \xrightarrow[n\to+\infty]{} \sum_{i=0}^{d} \omega_i \int_a^b f(t)\mathrm{d}t.$$

III Interpolation de Lagrange – 4° Méthodes composites

Si $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ est intégrable alors

$$S_n = \frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{i=0}^{d} \omega_i \, f\left(x_k + i\frac{x_{k+1}-x_k}{d}\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_a^b f(t)\mathrm{d}t.$$

En effet :

$$S_n = \sum_{i=0}^{d} \omega_i \left[\frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(x_k + i\frac{x_{k+1}-x_k}{d}\right)\right].$$

Pour chaque i fixé, les sommes de Riemann

$$\frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(x_k + i\frac{x_{k+1}-x_k}{d}\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_a^b f(t)\mathrm{d}t.$$

Ainsi

$$\sum_{i=0}^{d} \omega_i \left[\frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(x_k + i\frac{x_{k+1}-x_k}{d}\right)\right] \xrightarrow[n\to+\infty]{} \sum_{i=0}^{d} \omega_i \int_a^b f(t)\mathrm{d}t.$$

On conclut car $\sum_{i=0}^{d} \omega_i = 1$.

III Interpolation de Lagrange – 4° Méthodes composites

On observera en TP l'ordre de grandeur de l'erreur pour les différentes méthodes :

- pour les méthodes des rectangles, si f est C^1, $E_n = O\left(\frac{1}{n}\right)$;
- pour la méthode des rectangles au milieu, si f est C^2, $E_n = O\left(\frac{1}{n^2}\right)$;
- pour la méthode des trapèzes, si f est C^2, $E_n = O\left(\frac{1}{n^2}\right)$;
- pour la méthode de Simpson, si f est C^4, $E_n = O\left(\frac{1}{n^4}\right)$.