1. On cherche les valeurs du paramètre $\alpha \in \mathbb{R}$ telles que l'intégrale

$$\int_0^{\infty} \frac{t \ln t}{(1+t^2)^{\alpha}} dt$$

converge.

Remarquons pour commencer que cette intégrale est généralisée à la fois en 0 (car $t \mapsto \frac{t \ln t}{(1+t^2)^{\alpha}}$ n'est pas définie en 0) et en $+\infty$.

$\boxed{0}$ Par croissance comparée, on a

$$\frac{t \ln t}{(1+t^2)^{\alpha}} \underset{t \to 0}{\longrightarrow} 0.$$

Autrement dit, on peut prolonger $t \mapsto \frac{t \ln t}{(1+t^2)^{\alpha}} dt$ par continuité en 0. L'intégrale est donc "faussement généralisée" en 0, donc

$$\int_0^1 \frac{t \ln t}{(1+t^2)^{\alpha}} dt \quad \text{converge.}$$

Une autre preuve pour ceux qui n'aiment pas cet argument : comme

$$\frac{t \ln t}{(1+t^2)^{\alpha}} = o(1),$$

et comme $t \mapsto \frac{t \ln t}{(1+t^2)^{\alpha}}$ est négatif pour $0 < t \leq 1$, et $\int_0^1 1 dt$ converge, $\int_0^1 \frac{t \ln t}{(1+t^2)^{\alpha}} dt$ converge.

$\boxed{+\infty}$ On a l'équivalent

$$\frac{t \ln t}{(1+t^2)^{\alpha}} \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{t^{2\alpha-1} (\ln t)^{-1}}$$

On reconnait une intégrale de Bertrand; ainsi l'intégrale généralisée converge en $+\infty$ si et seulement si $2\alpha - 1 > 1$ i.e. $\alpha > 1$.

Finalement,

$$\int_0^{\infty} \frac{t \ln t}{(1+t^2)^{\alpha}} dt \quad \text{converge} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \alpha > 1.$$

3. On cherche les valeurs du paramètre $\alpha \in [-4, +\infty[$ telles que l'intégrale

$$\int_2^{+\infty} \left(\sqrt{x^4 + x^2 + 1} - x \sqrt[3]{x^3 + \alpha x} \right) dx$$

converge.

Commençons par remarquer que la fonction $x \mapsto \sqrt{x^4 + x^2 + 1} - x \sqrt[3]{x^3 + \alpha x}$ est bien définie sur $[2, +\infty[$ (le terme à l'intérieur de la racine carrée étant toujours positif).

On cherche un équivalent de la fonction en $+\infty$. On a

$$\sqrt{x^4 + x^2 + 1} = x^2 \sqrt{1 + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^4}}$$

et

$$\begin{aligned}\sqrt{1+\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^4}} &= 1+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^4}\right)+\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)\left(\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^4}\right)^2+o_\infty\left(\left(\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^4}\right)^2\right)\\ &= 1+\frac{1}{2x^2}+\frac{1}{2x^4}-\frac{1}{8x^4}+o_\infty\left(\frac{1}{x^4}\right)\\ &= 1+\frac{1}{2x^2}+\frac{3}{8x^4}+o_\infty\left(\frac{1}{x^4}\right)\end{aligned}$$

donc

$$\sqrt{x^4+x^2+1}=x^2+\frac{1}{2}+\frac{3}{8x^2}+o_\infty\left(\frac{1}{x^2}\right).$$

De même,

$$x\sqrt[3]{x^3+\alpha x}=x^2\left(1+\frac{\alpha}{x^2}\right)^{1/3}$$

et

$$\begin{aligned}\left(1+\frac{\alpha}{x^2}\right)^{1/3} &= 1+\frac{\alpha}{3x^2}+\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}-1\right)\frac{\alpha^2}{x^4}+o_\infty\left(\frac{1}{x^4}\right)\\ &= 1+\frac{\alpha}{3x^2}-\frac{\alpha^2}{9x^4}+o_\infty\left(\frac{1}{x^4}\right).\end{aligned}$$

donc

$$x\sqrt[3]{x^3+\alpha x}=x^2+\frac{\alpha}{3}-\frac{\alpha^2}{9x^2}+o_\infty\left(\frac{1}{x^2}\right).$$

Finalement,

$$\sqrt{x^4+x^2+1}-x\sqrt[3]{x^3+\alpha x}=\frac{1}{2}-\frac{\alpha}{3}+\left(\frac{3}{8}+\frac{\alpha^2}{9}\right)\frac{1}{x^2}+o_\infty\left(\frac{1}{x^2}\right).$$

Pour $\alpha\neq\frac{3}{2}$, on trouve

$$\sqrt{x^4+x^2+1}-x\sqrt[3]{x^3+\alpha x}\underset{x\to+\infty}{\longrightarrow}\frac{1}{2}-\frac{\alpha}{3}\neq 0$$

et donc par l'exercice 5,

$$\int_2^{+\infty}\left(\sqrt{x^4+x^2+1}-x\sqrt[3]{x^3+\alpha x}\right)dx\quad\text{diverge.}$$

Pour $\alpha=\frac{3}{2}$, on trouve

$$\sqrt{x^4+x^2+1}-x\sqrt[3]{x^3+(3/2)x}\underset{+\infty}{\sim}\frac{5}{8x^2}.$$

Il existe donc $A>0$ tel que

$$\forall x\geq A,\quad \sqrt{x^4+x^2+1}-x\sqrt[3]{x^3+(3/2)x}\geq 0.$$

De plus, comme

$$\int_2^{+\infty} \frac{5}{8x^2} dx \quad \text{converge,}$$

on trouve que

$$\int_2^{+\infty} \left(\sqrt{x^4 + x^2 + 1} - x \sqrt[3]{x^3 + (3/2)x} \right) dx \quad \text{converge.}$$