3b) Par le théorème fondamental de l'analyse, $x \mapsto \int_x^{+\infty} \frac{e^{-u}}{u^2} du = -\int_{+\infty}^{x} \frac{e^{-u}}{u^2} du$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$, et

$$\frac{d}{dx} \int_x^{+\infty} \frac{e^{-u}}{u^2} du = -\frac{e^{-x}}{x^2}.$$

Or $x \mapsto -\frac{e^{-x}}{x^2}$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_+^*$. Donc $x \mapsto \int_x^{+\infty} \frac{e^{-u}}{u^2} du$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$. Finalement, comme $x \mapsto x$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$, φ est $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_+^*$ comme produit de fonctions de classe $\mathcal{C}^\infty$.

3c) Par la formule de dérivation du produit, on trouve

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad \varphi'(x) &= \int_x^{+\infty} \frac{e^{-u}}{u^2} du - \frac{e^{-x}}{x} \\ &\leq e^{-x} \int_x^{+\infty} \frac{1}{u^2} du - \frac{e^{-x}}{x} \qquad \text{car si } u > x, \text{ alors } e^{-u} \leq e^{-x} \\ &= \frac{e^{-x}}{x} - \frac{e^{-x}}{x} = 0 \end{aligned}$$

d'où la décroissance de φ.

4a) Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$. Alors par intégration par parties, puisque $-\frac{1}{x} \frac{e^{-xt}}{t^2} \underset{t \to +\infty}{\longrightarrow} 0$,

$$\varphi(x) = \int_1^{+\infty} \frac{e^{-xt}}{t^2} dt \quad \text{et} \quad \frac{2}{x} \int_1^{+\infty} \frac{e^{-xt}}{t^3} dt \quad \text{sont de même nature.}$$

Donc $\int_1^{+\infty} \frac{e^{-xt}}{t^3} dt$ converge, et de plus on a

$$\varphi(x) = \int_1^{+\infty} \frac{e^{-xt}}{t^2} dt = \frac{e^{-x}}{x} - \frac{2}{x} \int_1^{+\infty} \frac{e^{-xt}}{t^3} dt.$$

4b) On a, pour $x > 0$,

$$\begin{aligned} xe^x \times \frac{2}{x} \int_1^{+\infty} \frac{e^{-xt}}{t^3} dt &= 2e^x \int_1^{+\infty} \frac{e^{-tx}}{t^3} dt \\ &\leq 2e^x \int_1^{+\infty} e^{-tx} dt \qquad \text{car si } t \geq 1 \text{ alors } \frac{1}{t^3} \leq 1 \text{ et } e^{-tx} \text{ est positif.} \\ &= 2e^x \frac{e^{-x}}{x} = \frac{2}{x} \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} 0. \end{aligned}$$

Donc

$$-\frac{2}{x} \int_1^{+\infty} \frac{e^{-xt}}{t^3} dt = o_{+\infty}\left(\frac{e^{-x}}{x}\right),$$

et finalement

$$\varphi(x) \underset{+\infty}{\sim} \frac{e^{-x}}{x}.$$