Feuille 3 : Intégrales impropres

Exercice 10 L'objectif de cet exercice est d'étudier $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(y)}{y}\,dy$ et de calculer sa valeur.

1. Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(y)}{y}\,dy$ est convergente.
2. On montre maintenant que l'intégrale est semi-convergente.
   (a) Montrer que pour tout $t \in \mathbb{R}$, $|\sin t| \geq \sin^2 t$.
   (b) Démontrer que l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\cos(2t)}{t}\,dt$ est convergente.
   (c) En déduire que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{|\sin(y)|}{y}\,dy$ diverge.
3. On considère la fonction $f\colon]0, \frac{\pi}{2}] \to \mathbb{R}$, $y \mapsto \frac{1}{y} - \frac{1}{\sin(y)}$.
   (a) Montrer que f se prolonge en une fonction $\mathcal{C}^1$ sur $[0, \frac{\pi}{2}]$.
   On notera toujours f ce prolongement.
   (b) En déduire que $\displaystyle\int_0^{\pi/2} f(y)\sin(ny)\,dy$ converge vers 0 quand n tend vers $+\infty$.
4. Pour tout entier $n \geq 0$, on pose $J_n = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{\sin((2n+1)y)}{\sin(y)}\,dy$.
   (a) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'intégrale J_n converge.
   (b) Montrer que la suite $(J_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(y)}{y}\,dy$.

   Réponse : Du point 3.(b) de l'exercice nous savons que $\displaystyle\int_0^{\pi/2} f(y)\sin(ny)\,dy$ converge vers 0 quand n tend vers $+\infty$. Il en est alors de même pour la suite extraite formée par les $\displaystyle\int_0^{\pi/2} f(y)\sin((2n+1)y)\,dy$. Or $\forall n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned}\int_0^{\pi/2} f(y)\sin((2n+1)y)\,dy &= \int_0^{\pi/2} \left(\frac{1}{y} - \frac{1}{\sin(y)}\right)\sin((2n+1)y)\,dy \\ &= \int_0^{\pi/2} \frac{\sin((2n+1)y)}{y}\,dy - J_n\end{aligned}$$

   En posant $u = (2n+1)y$, on obtient

$$\int_0^{\pi/2} \frac{\sin((2n+1)y)}{y}\,dy = \int_0^{(2n+1)\pi/2} \frac{\sin(u)}{u}\,du\ .$$

   Ceci montre que la suite des $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{\sin((2n+1)y)}{y}\,dy$ tend vers $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(y)}{y}\,dy$. On déduit de ceci que (c'est un exercice de faire cette déduction) $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} J_n = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(y)}{y}\,dy$ aussi.

   On rappelle que pour tous réels a et b, $\sin a - \sin b = 2\sin\left(\frac{a-b}{2}\right)\cos\left(\frac{a+b}{2}\right)$.

   (c) Montrer que la suite $(J_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est constante, puis conclure.