Université Claude Bernard - Lyon 1 Semestre d'automne 2024-2025
Analyse 3

Programme et exercices de révision pour l'examen du 9 janvier

L'examen sera constitué d'une question de cours et de plusieurs exercices.

Préparer vos questions pour la séance de soutien mercredi 11 décembre de 9h à 11h en amphi Griganrd.

1 Démonstrations à travailler et à connaître

1. Énoncé et preuve du théorème de caractérisations de la borne supérieure.
2. Énoncé et preuve du théorème des bornes atteintes.
3. Énoncé et preuve du théorème fondamental (du calcul intégral).
4. Preuve de la convergence des sommes de Riemann et de la majoration de l'erreur dans le cas d'une fonction $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ de classe C^1.
5. Critère de convergence de $\int_a^{+\infty} f(t)dt$ pour $f \geq 0$: la fonction $x \mapsto \int_a^x f(t)dt$ est croissante et $\int_a^{+\infty} f(t)dt$ converge ssi $x \mapsto \int_a^x f(t)dt$ est majorée.
6. Toute intégrale absolument convergente est convergente et dans ce cas on a l'inégalité triangulaire.
7. Si la série $\sum u_n$ est convergente alors la suite (u_n) converge vers 0. La réciproque est fausse, contre-exemple de la série harmonique.
8. Premier et second théorèmes de comparaison.
9. Théorème de comparaison avec une intégrale.
10. Énoncé et preuve du critère de convergence des séries alternées.

2 Liste non exhaustive de compétences attendues (en plus des énoncés précédents)

Il faut faire attention à la qualité et la précision de la rédaction (bonne utilisation des quantificateurs en particulier).

1. Écrire des énoncés mathématiques corrects (variables bien introduites, distinction claire entre "pour tout" et "il existe"...)
2. Savoir manipuler des inégalités, savoir majorer, savoir minorer.
3. Savoir justifier qu'un ensemble admet une borne supérieure et en connaître les différentes caractérisations.
4. Savoir manipuler les définitions de limite, de continuité, de continuité uniforme. Savoir justifier qu'une suite converge vers un réel ℓ, qu'une fonction est continue en un point a, qu'une fonction est uniformément continue.
5. Reconnaître un théorème « classique » à utiliser et savoir vérifier proprement ses hypothèses : « toute suite réelle croissante majorée est convergente », théorème des valeurs intermédiaires, théorème des bornes atteintes, théorème des accroissements finis, théorème de Taylor-Lagrange.
6. Connaître et savoir utiliser les propriétés de l'intégrale de Riemann (linéarité, monotonie, relation de Chasles, inégalité triangulaire).
7. Savoir calculer des intégrales ou primitives simples, en utilisant si besoin un développement en éléments simples des fractions rationnelles, une intégration par parties, un changement de variables.
8. Connaître et savoir utiliser la définition de la convergence d'une intégrale impropre.
9. Connaître et savoir utiliser les propriétés des intégrales impropres convergentes (linéarité, monotonie, relation de Chasles).
10. Connaître les théorèmes de comparaison et savoir déterminer des équivalents ou des majorations pour les utiliser en comparant à des intégrales de référence (intégrales de Riemann et de Bertrand). Pour ce faire, savoir utiliser les croissances comparées et des développements limités.
11. Connaître les définitions de la convergence absolue et de la semi-convergence d'une intégrale impropre.
12. Savoir utiliser les méthodes d'intégration par parties et de changement de variables pour calculer des intégrales impropres.
13. Connaître et savoir utiliser les définitions de la convergence et de la convergence absolue d'une série numérique.
14. Connaître et savoir utiliser les propriétés des séries convergentes (la suite des termes converge vers 0, linéarité, monotonie).
15. Connaître les exemples de références : séries géométriques, séries exponentielles, séries de Riemann, séries de Bertrand.
16. Connaître les règles de Cauchy, de d'Alembert et les théorèmes de comparaison pour les séries à termes strictement positifs. Savoir les utiliser. Et à nouveau, savoir utiliser les croissances comparées, des développements limités et des équivalents.
17. Connaître et savoir utiliser le théorème de comparaison séries/intégrales.
18. Savoir reconnaître une série alternée et savoir utiliser le cas échéant le critère de convergence des séries alternées.

3 Exercices issus d'annale

Exercice 1. `Comparaison avec une série de Bertrand`

Étudier la convergence de la série $\displaystyle\sum_{n\geq 2} \frac{\sqrt[3]{n^2}+(\ln n)^2+\sqrt{n}}{n^{5/3}(\ln n)^2}$.

Exercice 2. `Intégrales impropres`

1. Donner un équivalent simple au voisinage de $+\infty$ de $\ln(x+\sqrt{x})-\ln x$.
2. En déduire la nature de $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\ln(x+\sqrt{x})-\ln x}{x^{3/4}}\,dx$.
3. Montrer que pour tout $x \in]0,1/4[$, on a
$$0<\ln\left(x+\sqrt{x}\right)-\ln x<-\ln x.$$
4. En déduire la nature de $\displaystyle\int_0^{1} \frac{\ln(x+\sqrt{x})-\ln x}{x^{3/4}}\,dx$.

Exercice 3. `Des intégrales impropres et des séries`

1. Donner une condition nécessaire et suffisante sur $a\in\mathbb{R}$ pour la convergence de l'intégrale impropre $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\ln(1+t)-\sin t}{t^a}\,dt$.
2. Déterminer la nature de la série $\displaystyle\sum \frac{\cos(n)}{n^2+1}$.
3. (a) Établir le tableau de variations de la fonction $f\colon t\mapsto \dfrac{\ln t}{t}$ sur $]0,+\infty[$.

   (b) Pour tout $n\in\mathbb{N}$, on pose $a_n=(-1)^n\dfrac{\ln(n+3)}{n+3}$.

   i. La série $\sum a_n$ est-elle absolument convergente ?

   ii. La série $\sum a_n$ est-elle convergente ?

Exercice 4. `Comparaison série/intégrale`

Le but de cet exercice est de déterminer $\displaystyle\lim_{a\to+\infty}\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{a}{k^2+a^2}$.

On fixe un réel strictement positif a.

1. Calculer $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{a}{x^2+a^2}\,dx$.
2. Montrer que la série $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{a}{k^2+a^2}$ est convergente.
3. Montrer les inégalités suivantes :
$$\frac{\pi}{2}\leq\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{a}{k^2+a^2}\leq\frac{\pi}{2}+\frac{1}{a}.$$
4. Conclure.

Exercice 5. `Une série alternée`

Pour $n\geq 1$, on pose
$$a_n=\int_{n\pi}^{(n+1)\pi}\frac{\sin x}{x}\,dx.$$

1. À l'aide d'un changement de variable, montrer que pour chaque $n\geq 1$, on a
$$a_n=(-1)^n\int_0^{\pi}\frac{\sin t}{t+n\pi}\,dt.$$
2. En déduire que la série $\displaystyle\sum_{n\geq 1} a_n$ est convergente.
3. Montrer que pour tout $n\geq 1$, on a
$$\frac{2}{(n+1)\pi}\leq|a_n|\leq\frac{2}{n\pi}.$$
4. La série $\displaystyle\sum_{n\geq 1} a_n$ est-elle absolument convergente ?