Examen du 9 janvier 2025 - Durée : 2h

La rédaction est importante, nous en tiendrons compte dans la correction.

Exercice 1. Questions de cours

Énoncer le théorème fondamental (du calcul intégral).

Exercice 2. Des intégrales impropres

Étudier la nature des intégrales impropres suivantes :

1. $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{\sin t}{1-\cos t}\, dt$
2. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{\ln(1+t^2)}\, dt$
3. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{xe^{-x}}{\sqrt{1+x}-1}\, dx$

Exercice 3. Des séries

Étudier la nature des séries suivantes :

1. $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{\ln n^2 + 5^n - n}{7^n+3}$
2. $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \left(\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) - \sin\frac{1}{n}\right)$
3. $\displaystyle\sum_{n\geq 0} \frac{n!(2n)!}{(3n)!}$

Exercice 4. Une série alternée

Pour $n \in \mathbf{N}$, on pose $u_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{x^{2n}}{1+x^2}\, dx$ et $v_n = \dfrac{(-1)^n}{2n+1}$.

1. (a) Calculer u_0.
   (b) Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est décroissante.
   (c) Montrer que pour tout $n \in \mathbf{N}$, $0 \leq u_n \leq \dfrac{1}{2n+1}$.
   (d) Montrer que pour tout $n \in \mathbf{N}$, $u_n + u_{n+1} = \dfrac{1}{2n+1}$.
2. (a) Étudier la convergence de la série $\sum v_n$.
   (b) Montrer que pour tout $n \in \mathbf{N}$, $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} v_k = \frac{\pi}{4} + (-1)^n u_{n+1}$.
   (c) En déduire la valeur de $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} v_k$.

Exercice 5. `Étude d'une fonction`

On considère une fonction continue $f\colon [1,+\infty[\to \mathbf{R}$ telle que $f(t) \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

1. Justifier que pour tout réel $x \in [1,+\infty[$, l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{f(tx)}{t^3}\,dt$ converge.

On définit alors la fonction φ sur $[1,+\infty[$ par, pour tout $x \in [1,+\infty[$,

$$\varphi(x) = \int_1^{+\infty} \frac{f(tx)}{t^3}\,dt.$$

2. On suppose pour cette question que f est k-lipschitzienne, c'est-à-dire qu'il existe un réel $k > 0$ tel que
$$\forall x, y \in [1,+\infty[,\ |f(x) - f(y)| \leq k|x-y|.$$
Montrer que φ est également k-lipschitzienne.

3. Montrer que, pour tout $x \in [1,+\infty[$, $\displaystyle\varphi(x) = x^2\int_x^{+\infty} \frac{f(u)}{u^3}\,du$.

4. (a) Montrer que f est bornée sur $[1,+\infty[$.
   (b) En déduire que pour tout $x \in [1,+\infty[$, l'ensemble $\{|f(u)|\colon u \in [x,+\infty[\}$ admet une borne supérieure.
   (c) Pour $x \in [1,+\infty[$, on pose $M(x) = \sup\{|f(u)|\colon u \in [x,+\infty[\}$.
   Montrer que pour tout $x \in [1,+\infty[$,
   $$|\varphi(x)| \leq \frac{M(x)}{2}.$$
   (d) En déduire que $\varphi(x)$ tend vers 0 quand x tend vers $+\infty$.