# Examen du 9 janvier 2025 - Durée : 2h

La rédaction est importante, nous en tiendrons compte dans la correction.

**Exercice 1.** Questions de cours

Énoncer le théorème fondamental (du calcul intégral).

Solution : Soit $f : I \to \mathbf{R}$ une fonction continue sur un intervalle $I$ de $\mathbf{R}$. Alors pour tout $a \in I$, la fonction $F_a : I \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \displaystyle\int_a^x f(t)dt$ est l'unique primitive de $f$ qui s'annule en $a$.

Remarque : Apprenez correctement les énoncés du cours avec leurs hypothèses et conclusions précises !

**Exercice 2.** Des intégrales impropres

Étudier la nature des intégrales impropres suivantes :

1. $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{\sin t}{1-\cos t}\,dt$
2. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{\ln(1+t^2)}\,dt$
3. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{xe^{-x}}{\sqrt{1+x}-1}\,dx$

Solution :

1. — Pour $t \in ]0, \pi/2]$, $\cos t < 1$ et $\sin t > 0$ donc la fonction $t \mapsto \dfrac{\sin t}{1-\cos t}$ est strictement positive sur $]0, \pi/2]$. Cette fonction est de plus continue sur $]0, \pi/2]$ comme fraction de fonctions continues et l'intégrale considérée n'est donc impropre qu'en 0.
   — Au voisinage de 0, on a $\sin t \underset{0}{\sim} t$ et $\cos t = 1 - t^2/2 + o(t^2)$ d'où $1 - \cos t \underset{0}{\sim} t^2/2$. Ainsi, $\dfrac{\sin t}{1-\cos t} \underset{0}{\sim} \dfrac{2}{t}$. Alors, par le théorème de comparaison d'intégrales de fonctions positives, l'intégrale $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{\sin t}{1-\cos t}\,dt$ est de même nature que l'intégrale de Riemann $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{t}\,dt$ qui diverge.
2. — La fonction $t \mapsto \dfrac{1}{\ln(1+t^2)}$ est continue et strictement positive sur $]0, +\infty[$. L'intégrale considérée n'est impropre qu'en 0 et $+\infty$.
   — En 0, on a $\dfrac{1}{\ln(1+t^2)} \underset{0}{\sim} \dfrac{1}{t^2}$ et donc, comme dans l'exemple précédent, l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{\ln(1+t^2)}\,dt$ est de même nature que l'intégrale de Riemann $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{t^2}\,dt$ qui diverge. On peut ainsi conclure que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{\ln(1+t^2)}\,dt$ est divergente.
   Remarque : Nous pourrions également conclure en étudiant la convergence en $+\infty$. On vérifie facilement que $\dfrac{1}{\ln(1+t^2)} \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{1}{\ln(t^2)} \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{1}{2\ln t}$ et par comparaison avec l'intégrale de Bertrand $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{\ln t}\,dt$, l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{\ln(1+t^2)}\,dt$ est divergente.
3. — Pour $x > 0$, on a $\sqrt{1+x} - 1 > 0$. La fonction $x \mapsto \dfrac{xe^{-x}}{\sqrt{1+x}-1}$ est strictement positive et continue sur $]0, +\infty[$.

— Au voisinage de 0, on a $\sqrt{1+x} = 1 + x/2 + o(x)$ et donc $\sqrt{1+x} - 1 \underset{0}{\sim} x/2$. On en déduit que $\dfrac{xe^{-x}}{\sqrt{1+x}-1} \underset{0}{\sim} \dfrac{x}{x/2}$. La fonction $x \mapsto \dfrac{xe^{-x}}{\sqrt{1+x}-1}$ a ainsi pour limite 2 en 0 et est donc prolongeable par continuité en 0. L'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \frac{xe^{-x}}{\sqrt{1+x}-1}\,dx$ n'est donc pas réellement impropre.

— En $+\infty$, par croissance comparée on a $x^2 \dfrac{xe^{-x}}{\sqrt{1+x}-1} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ et donc $\dfrac{xe^{-x}}{\sqrt{1+x}-1} = o\left(\dfrac{1}{x^2}\right)$. Or l'intégrale de Riemann $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2}\,dx$ converge, donc par le théorème de comparaison d'intégrales de fonctions positives, l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{xe^{-x}}{\sqrt{1+x}-1}\,dx$ converge, ce qui permet de conclure avec ce qui précède que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{xe^{-x}}{\sqrt{1+x}-1}\,dx$ converge.

Remarque : Les théorèmes de comparaison s'appliquent pour des fonctions positives (ou de signe constant) au voisinage de 0 ou $+\infty$ respectivement. Il faut donc a minima faire une remarque sur la positivité des fonctions.

**Exercice 3.** `Des séries`

Étudier la nature des séries suivantes :

1. $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{\ln n^2 + 5^n - n}{7^n + 3}$ 2. $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \left(\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) - \sin\frac{1}{n}\right)$ 3. $\displaystyle\sum_{n\geq 0} \frac{n!(2n)!}{(3n)!}$

Solution :

1. Par croissance comparée, on a $\ln n^2 + 5^n - n \sim 5^n$ et $7^n + 3 \sim 7^n$ donc $\frac{\ln n^2+5^n-n}{7^n+3} \sim \left(\frac{5}{7}\right)^n$. La série géométrique $\displaystyle\sum \left(\frac{5}{7}\right)^n$ est convergente car $\left|\frac{5}{7}\right| < 1$. Ainsi, par comparaison à cette série à termes strictement positifs, la série $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{\ln n^2 + 5^n - n}{7^n + 3}$ est (absolument) convergente.
2. Au voisinage de 0, $\ln(1+t) = t - \dfrac{t^2}{2} + o(t^2)$ et $\sin(t) = t + o(t^2)$.

   Comme $\dfrac{1}{n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, on en déduit que
   $$\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) - \sin\frac{1}{n} = -\frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) \text{ et donc } \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) - \sin\frac{1}{n} \sim -\frac{1}{2n^2}.$$
   Remarque : On n'adittionne jamais des équivalents!!! Et il n'est pas possible pour une suite non nulle à partir d'un certain moment d'être équivalente à 0. De même une fonction qui n'est pas nulle au voisinage de 0 ne peut être équivalente à 0 en 0!!!

   La série de Riemann $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2}$ est convergente et donc, par comparaison avec l'opposé de cette série à termes positifs, la série $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \left(\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) - \sin\frac{1}{n}\right)$ est convergente.
3. Testons la règle de d'Alembert : pour $n > 0$, on a
   $$\frac{\frac{(n+1)!(2(n+1))!}{(3(n+1))!}}{\frac{n!(2n)!}{(3n)!}} = \frac{(n+1)(2n+2)(2n+1)}{(3n+3)(3n+2)(3n+1)} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{4}{27} < 1.$$
   Par la règle de d'Alembert, cette série à termes strictement positifs converge.

**Exercice 4.** `Une série alternée`

Pour $n \in \mathbf{N}$, on pose $u_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{x^{2n}}{1+x^2}\,dx$ et $v_n = \dfrac{(-1)^n}{2n+1}$.

1. (a) Calculer $u_0$.

   Solution : $u_0 = \displaystyle\int_0^1 \frac{1}{1+x^2}\,dx = \Big[\arctan x\Big]_0^1 = \frac{\pi}{4}$.

   (b) Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est décroissante.

   Solution : Soit $n \in \mathbf{N}$.

   Remarque : Dans cette question, comme dans les suivantes, on précise qui et où est $n$. De même pour $x$.

   Notons que pout tout $x \in [0,1]$, on a $x^{2n+2} \leq x^{2n}$ et donc, $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^{2n+2}}{1+x^2}\,dx \leq \int_0^1 \frac{x^{2n}}{1+x^2}\,dx$.

   Ainsi, $u_{n+1} \leq u_n$. La suite est en effet décroissante.

   (c) Montrer que pour tout $n \in \mathbf{N}$, $0 \leq u_n \leq \dfrac{1}{2n+1}$.

   Solution : Soit $n \in \mathbf{N}$. Pout tout $x \in [0,1]$, on a $0 \leq \dfrac{x^{2n}}{1+x^2} \leq x^{2n}$. On en déduit que $0 \leq u_n \leq \displaystyle\int_0^1 x^{2n}\,dx$. On conclut par le fait que $\displaystyle\int_0^1 x^{2n}\,dx = \frac{1}{2n+1}$.

   (d) Montrer que pour tout $n \in \mathbf{N}$, $u_n + u_{n+1} = \dfrac{1}{2n+1}$.

   Solution : Soit $n \in \mathbf{N}$. On a

$$u_n + u_{n+1} = \int_0^1 \frac{x^{2n} + x^{2(n+1)}}{1+x^2}\,dx = \int_0^1 \frac{x^{2n}(1+x^2)}{1+x^2}\,dx = \int_0^1 x^{2n}\,dx = \frac{1}{2n+1}.$$

2. (a) Étudier la convergence de la série $\sum v_n$.

   Solution : La suite $\left(\dfrac{1}{2n+1}\right)_{n\in\mathbf{N}}$ est une suite décroissante qui converge vers 0. Ainsi, la série alternée $\sum v_n$ satisfait le critère des séries alternées et est convergente.

   (b) Montrer que pour tout $n \in \mathbf{N}$, $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} v_k = \frac{\pi}{4} + (-1)^n u_{n+1}$.

   Solution : Soit $n \in \mathbf{N}$. En utilisant les questions 1 (a) et (d), on a

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n} v_k &= \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{1}{2k+1} \\
&= \sum_{k=0}^{n} (-1)^k (u_k + u_{k+1}) \\
&= \sum_{k=0}^{n} (-1)^k u_k + \sum_{k=0}^{n} (-1)^k u_{k+1} \\
&= \sum_{k=0}^{n} (-1)^k u_k - \sum_{k=1}^{n+1} (-1)^k u_k \\
&= u_0 - (-1)^{n+1} u_{n+1} \\
&= \frac{\pi}{4} + (-1)^n u_{n+1}.
\end{aligned}$$

(c) En déduire la valeur de $\sum_{k=0}^{+\infty} v_k$.

Solution : Par 1 (c) on a $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ et donc, par la question précédente, $\sum_{k=0}^{+\infty} v_k = \frac{\pi}{4}$.

**Exercice 5.** `Étude d'une fonction`

On considère une fonction continue $f\colon [1,+\infty[\to \mathbf{R}$ telle que $f(t) \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

1. Justifier que pour tout réel $x \in [1,+\infty[$, l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{f(tx)}{t^3}\,dt$ converge.

   Solution : Soit $x \in [1,+\infty[$. Alors pour tout $t \in [1,+\infty[$, $tx \in [1,+\infty[$. Notons de plus que $f$ étant continue, la fonction $t \mapsto \frac{f(tx)}{t^3}$ est également continue sur $[1,+\infty[$.

   De plus, comme $tx \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$ et $f(t) \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, on a aussi $f(tx) \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, et ainsi, $\frac{f(tx)}{t^3} = o\left(\frac{1}{t^3}\right)$ en $+\infty$. Comme l'intégrale de Riemann $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^3}\,dt$ converge, on en déduit par le théorème de comparaison d'intégrales de fonctions positives que $\int_1^{+\infty} \frac{|f(tx)|}{t^3}\,dt$ est convergente, ce qui permet de conclure (une intégrale absolument convergente étant convergente).

   Remarque : Il est important dans cette question, de commencer par fixer $x$ dans $[1,+\infty[$.

On définit alors la fonction $\varphi$ sur $[1,+\infty[$ par, pour tout $x \in [1,+\infty[$,

$$\varphi(x) = \int_1^{+\infty} \frac{f(tx)}{t^3}\,dt.$$

2. On suppose pour cette question que $f$ est $k$-lipschitzienne, c'est-à-dire qu'il existe un réel $k > 0$ tel que

   $$\forall x, y \in [1,+\infty[,\ |f(x) - f(y)| \leq k|x-y|.$$

   Montrer que $\varphi$ est également $k$-lipschitzienne.

   Solution : On considère un réel $k > 0$ tel que $f$ est $k$-lipschitzienne.

   Soit $x$, $y \in [1,+\infty[$. Alors,

   $$\begin{aligned} \big|\varphi(x) - \varphi(y)\big| &= \left|\int_1^{+\infty} \frac{f(tx) - f(ty)}{t^3}\,dt\right| \\ &\leq \int_1^{+\infty} \frac{|f(tx) - f(ty)|}{t^3}\,dt \\ &\leq \int_1^{+\infty} \frac{k|tx - ty|}{t^3}\,dt \\ &\leq k|x-y| \int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2}\,dt \\ &\leq k|x-y|. \end{aligned}$$

3. Montrer que, pour tout $x \in [1,+\infty[$, $\varphi(x) = x^2 \int_x^{+\infty} \frac{f(u)}{u^3}\,du$.

   Solution : Soit $x \in [1,+\infty[$. Faisons un changement de variables : posons $u = tx$. Alors $t = u/x$ et $dt = du/x$. Ainsi,

   $$\varphi(x) = \int_x^{+\infty} \frac{f(u)}{(u/x)^3} \frac{du}{x} = x^2 \int_x^{+\infty} \frac{f(u)}{u^3}\,du$$

   .

4. (a) Montrer que $f$ est bornée sur $[1,+\infty[$.

Solution : Comme $f(t) \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, il existe $A>1$ tel que pour tout $t \geq A$, $|f(t)| \leq 1$. En particulier $f$ est bornée sur $[A,+\infty[$.

De plus, comme $f$ est continue, sa restriction au segment $[1, A]$ est bornée. On en déduit que $f$ est bornée sur $[1,+\infty[$.

(b) En déduire que pour tout $x \in [1,+\infty[$, l'ensemble $\{|f(u)|\colon u \in [x,+\infty[\}$ admet une borne supérieure.

Solution : Soit $x \in [1,+\infty[$. Comme $f$ est bornée sur $[1,+\infty[$, l'ensemble $\{|f(u)|\colon u \in [x,+\infty[\}$ est majoré. De plus, cet ensemble est non vide car il contient en particulier l'élément $|f(x)|$. Enfin cet ensemble est une partie de $\mathbf{R}$ et, comme toute partie de $\mathbf{R}$ non vide majorée admet une borne supérieure, il admet une borne supérieure.

(c) Pour $x \in [1,+\infty[$, on pose $M(x) = \sup\{|f(u)|\colon u \in [x,+\infty[\}$.
Montrer que pour tout $x \in [1,+\infty[$,

$$|\varphi(x)| \leq \frac{M(x)}{2}.$$

Solution : Soit $x \in [1,+\infty[$. Par la question (3) et inégalité triangulaire on a,

$$\left|\varphi(x)\right| \leq x^2 \int_x^{+\infty} \frac{|f(u)|}{u^3}\,du \leq x^2 \int_x^{+\infty} \frac{M(x)}{u^3}\,du \leq x^2 \frac{M(x)}{2x^2} \leq \frac{M(x)}{2}.$$

(d) En déduire que $\varphi(x)$ tend vers 0 quand $x$ tend vers $+\infty$.

Solution : D'après l'inégalité précédente, il suffit de montrer que $M(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

Considérons $\varepsilon > 0$. Comme $f(t) \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, il existe $A > 1$ tel que pour tout $t \geq A$, $|f(t)| \leq \varepsilon$.

Soit $x \geq A$. Alors pour tout $u \geq x$, on a $u \geq A$ et donc $|f(u)| \leq \varepsilon$. Ainsi, $\{|f(u)|\colon u \in [x,+\infty[\}$ est majorée par $\varepsilon$ et donc $M(x) \leq \varepsilon$. Notons de plus que $M(x) \geq |f(x)| \geq 0$.

On a donc montré que :

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists A > 1\ \forall x \geq A\ |M(x)| \leq \varepsilon$$

c'est-à-dire que $M(x)$ tend vers 0 quand $x$ tend vers $+\infty$.