Université Claude Bernard
Année universitaire 2024 – 2025

Licence de Mathématiques
Analyse 3

Partiel du 6 novembre 2024 - Durée : 2h

La rédaction est importante, nous en tiendrons compte dans la correction.
Le sujet comporte 2 pages.

Exercice 1 Question de cours

Considérons deux réels a et b tels que $a < b$, et une fonction $f : [a,b] \to \mathbf{R}$ de classe C^1. Soit $n \geq 1$, x_0, …, x_n une subdivision régulière de $[a,b]$, et α_0, …, α_{n-1}, n points de $[a,b]$ tels que pour chaque $k \in \{0,\dots,n-1\}$, $\alpha_k \in [x_k, x_{k+1}]$.

1. Rappeler la valeur de x_k pour chaque $k \in \{0,\dots,n\}$.
2. On fixe $k \in \{0,\dots,n-1\}$. Montrer que
$$\left|\int_{x_k}^{x_{k+1}} (f(t) - f(\alpha_k))\,\mathrm{d}t\right| \leq M_1\,\frac{(b-a)^2}{2n^2} \text{ où } M_1 = \sup_{t\in[a,b]} |f'(t)|.$$
3. Retrouver ainsi la majoration théorique vue en cours de l'erreur d'approximation :
$$\left|\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t - \frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f(\alpha_k)\right| \leq M_1\,\frac{(b-a)^2}{2n}$$

Exercice 2 Uniforme continuité

1. Rappeler la définition de l'uniforme continuité d'une fonction $f : I \to \mathbf{R}$ où I est un intervalle de $\mathbf{R}$.
2. Écrire la négation de l'uniforme continuité.
3. Vérifier que
$$\forall \delta > 0,\ \left(\frac{1}{\delta} + \frac{\delta}{2}\right)^2 - \frac{1}{\delta^2} \geq 1.$$
4. En déduire que la fonction carrée $g : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $x \mapsto x^2$, n'est pas uniformément continue.
5. Est-ce que le produit de deux fonctions uniformément continues est nécessairement uniformément continue ?

Exercice 3 Calcul d'une intégrale

1. Calculer $\displaystyle\int_0^{\ln 2} u^2 e^u\,\mathrm{d}u$.
2. En déduire la valeur de $\displaystyle\int_1^2 (\ln t)^2\,\mathrm{d}t$.

   Indication : on pourra utiliser un changement de variables.

Exercice 4 `Borne supérieure`

Soit $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ continue tel que $f(0) = 0$.
On suppose qu'il existe $b > 0$ tel que $f(b) \neq 0$.
On pose
$$A = \{x \in \mathbf{R} \colon x \leq b \text{ et } f(x) = 0\}.$$

1. Montrer que A admet une borne supérieure. On la note a.
2. Montrer que $f(a) = 0$.
3. En déduire que $a < b$.
4. Montrer que : $\forall x \in]a, b],\ f(x) \neq 0$.

Exercice 5 `Étude d'une suite`

Pour chaque entier $n \geq 2$, on considère la fonction $f_n : \mathbf{R}_+ \to \mathbf{R}$, $x \mapsto x^n + x - 1$.

1. Montrer que pour tout $n \geq 2$, la fonction f_n réalise une bijection de $\mathbf{R}_+$ sur $[-1, +\infty[$.
2. Soit $n \geq 2$. Justifier que l'équation $f_n(x) = 0$ admet une unique solution dans $\mathbf{R}_+$. On la note u_n.
3. Montrer que : $\forall n \geq 2,\ 0 < u_n < 1$.
4. Montrer que : $\forall n \geq 2,\ f_n(u_{n+1}) > 0$.
5. En déduire que : $\forall n \geq 2,\ u_n < u_{n+1}$.
6. Que peut-on en déduire sur la suite $(u_n)_{n\geq 2}$?
7. Déterminer le cas échéant la limite de $(u_n)_{n\geq 2}$.