Chapitre 1 – Nombres réels

UE Analyse 2

Élise Fouassier

Ensembles de nombres usuels

On rappelle les notations suivantes :

- $\mathbf{N}$ est l'ensemble des entiers naturels :

$$\mathbf{N} = \{0, 1, 2, \ldots\}$$

  et $\mathbf{N}^* = \mathbf{N} \backslash \{0\} = \{1, 2, \ldots\}$;
- $\mathbf{Z}$ est l'ensemble des entiers relatifs :

$$\mathbf{Z} = \{\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots\}$$

- $\mathbf{Q}$ est l'ensemble des nombres rationnels :

$$\mathbf{Q} = \left\{ \frac{a}{b} \,\middle|\, a \in \mathbf{Z}, b \in \mathbf{N}^* \right\}$$

- $\mathbf{R}$ est l'ensemble des nombres réels ;
- $\mathbf{C}$ est l'ensemble des nombres complexes :

$$\mathbf{C} = \left\{ x + iy \,\middle|\, (x, y) \in \mathbf{R}^2 \right\}$$

Ensembles de nombres usuels

Inclusions

On a les inclusions suivantes :

$$\mathbf{N} \subset \mathbf{Z} \subset \mathbf{Q} \subset \mathbf{R} \subset \mathbf{C}$$

et ses inclusions sont strictes.

Rationnels, irrationnels

En particulier, il existe des nombres réels qui ne sont pas rationnels.

Un réel qui n'est pas rationnel est dit irrationnel. L'ensemble des irrationnels est $\mathbf{R} \backslash \mathbf{Q}$.

Exemple : $\sqrt{2}$ est irrationnel.

Les lois $+$ et $\times$ sur $\mathbf{R}$

L'ensemble $\mathbf{R}$ des nombres réels est muni de deux lois $+$ et $\times$ avec les propriétés suivantes :

— La loi $+$ vérifie :
  - pour tout $x \in \mathbf{R}$, tout $y \in \mathbf{R}$, tout $z \in \mathbf{R}$, $x + (y + z) = (x + y) + z$

    On dit que la loi $+$ est associative.
  - pour tout $x \in \mathbf{R}$, tout $y \in \mathbf{R}$, $x + y = y + x$

    On dit que la loi $+$ est commutative.
  - pour tout $x \in \mathbf{R}$, $x + 0 = 0 + x = x$

    On dit que 0 est un élément neutre pour la loi $+$.
  - pour tout $x \in \mathbf{R}$, il existe $y \in \mathbf{R}$ tel que $x + y = y + x = 0$; on note $y = -x$.

    On dit que tout réel admet un opposé (symétrique pour la loi $+$).

Les lois $+$ et $\times$ sur $\mathbf{R}$

- La loi $\times$ vérifie :
  - pour tout $x \in \mathbf{R}$, tout $y \in \mathbf{R}$, tout $z \in \mathbf{R}$, $x \times (y \times z) = (x \times y) \times z$
    On dit que la loi $\times$ est associative.
  - pour tout $x \in \mathbf{R}$, tout $y \in \mathbf{R}$, $x \times y = y \times x$
    On dit que la loi $\times$ est commutative.
  - pour tout $x \in \mathbf{R}$, $x \times 1 = 1 \times x = x$
    On dit que 1 est un élément neutre pour la loi $\times$.
  - pour tout $x \in \mathbf{R}^*$, il existe $y \in \mathbf{R}^*$ tel que $xy = yx = 1$; on note $y = \dfrac{1}{x}$.
    On dit que tout réel non nul admet un inverse (symétrique pour la loi $\times$).
- Pour tout $x \in \mathbf{R}$, tout $y \in \mathbf{R}$, tout $z \in \mathbf{R}$,
$$x \times (y + z) = (x \times y) + (x \times z)$$
  On dit que la loi $\times$ est distributive sur la loi $+$.

Toutes ces propriétés de $\mathbf{R}$ muni des deux lois $+$ et $\times$ permettent de dire

$(\mathbf{R}, +, \times)$ est un corps commutatif.

La relation $\leqslant$ sur $\mathbf{R}$

$\mathbf{R}$ est aussi muni d'une relation $\leqslant$ qui vérifie les propriétés suivantes :

- pour tout $x \in \mathbf{R}$, $x \leqslant x$

  On dit que la relation $\leqslant$ est réflexive.

- pour tout $(x, y) \in \mathbf{R}^2$, $(x \leqslant y \text{ et } y \leqslant x) \Longrightarrow (x = y)$

  On dit que la relation $\leqslant$ est antisymétrique.

- pour tout $(x, y, z) \in \mathbf{R}^3$, $(x \leqslant y \text{ et } y \leqslant z) \Longrightarrow (x \leqslant z)$

  On dit que la relation $\leqslant$ est transitive.

- pour tout $(x, y) \in \mathbf{R}^2$, $x \leqslant y$ ou $y \leqslant x$

  On dit que la relation $\leqslant$ est totale.

Toutes ces propriétés de la relation $\leqslant$ sur $\mathbf{R}$ permettent de dire

$\leqslant$ est une relation d'ordre total sur $\mathbf{R}$.

La relation $\leqslant$ sur $\mathbf{R}$

Les lois $+$ et $\times$ sont compatibles avec la relation $\leqslant$ dans le sens suivant :

- pour tout $(x, y, z) \in \mathbf{R}^3$, $(x \leqslant y) \Longrightarrow (x + z \leqslant y + z)$

  La relation $\leqslant$ est compatible avec l'addition.
- pour tout $(x, y, z) \in \mathbf{R}^3$, $(x \leqslant y \ \underline{\text{et } 0 \leqslant z}) \Longrightarrow (x \times z \leqslant y \times z)$

  La relation $\leqslant$ est compatible avec la multiplication par un réel positif.

Toutes ces propriétés permettent de dire que

$(\mathbf{R}, +, \times, \leqslant)$ est un corps totalement ordonné.

La valeur absolue

Définition

Pour tout $x \in \mathbf{R}$, on appelle valeur absolue de x le nombre défini par :

$$|x| = \begin{cases} x & \textit{si } x \geqslant 0 \\ -x & \textit{si } x < 0 \end{cases}$$

On a les propriétés suivantes :

- pour tout $x \in \mathbf{R}$, $|x| \geqslant 0$.
- pour tout $x \in \mathbf{R}$, $|x| = \max(x, -x)$.
- pour tout $x \in \mathbf{R}$, $|x| = 0 \iff x = 0$.
- pour tout $(x, y) \in \mathbf{R}^2$, $|xy| = |x||y|$.

La valeur absolue

- pour tout $(x, y) \in \mathbf{R}^2$, $|x + y| \leqslant |x| + |y|$

  Inégalité triangulaire.

- pour tout $(x, y) \in \mathbf{R}^2$, $\big||x| - |y|\big| \leqslant |x - y|$

  Deuxième forme de l'inégalité triangulaire.

Avec la valeur absolue, on peut définir la distance usuelle sur $\mathbf{R}$.

Définition

Pour tous réels x et y, on appelle distance de x à y le nombre $|x - y|$.

En particulier, pour tout $x \in \mathbf{R}$, $|x|$ est la distance de x à 0.

Propriété fondamentale des suites réelles

Théorème

Toute suite réelle croissante et majorée converge.

Écrivons en détails les hypothèses et la conclusion.

Soit $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite réelle. On suppose que

- $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est croissante : pour tout $n \in \mathbf{N}$, $x_n \leqslant x_{n+1}$;
- $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est majorée : il existe $M \in \mathbf{R}$ tel que pour tout $n \in \mathbf{N}$, $x_n \leqslant M$.

Alors $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ converge : il existe $\ell \in \mathbf{R}$ tel que $\lim\limits_{n\in\mathbf{N}} x_n = \ell$.
Ceci s'écrit :
pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $N \in \mathbf{N}$ tel que pour tout $n \geqslant N$, $|x_n - \ell| \leqslant \varepsilon$.

De plus, la limite ℓ vérifie : $\ell \leqslant M$.

Attention ! On n'a pas nécessairement $\ell = M$! !

Propriété fondamentale des suites réelles

Voici deux conséquences de cette propriété fondamentale.

Théorème

Toute suite réelle décroissante et minorée converge.

Théorème (Suites adjacentes)

Soit $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ et $(y_n)_{n\in\mathbf{N}}$ deux suites réelles. On suppose que $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ et $(y_n)_{n\in\mathbf{N}}$ sont adjacentes, c'est-à-dire :

- $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ *est croissante ;*
- $(y_n)_{n\in\mathbf{N}}$ *est décroissante ;*
- $\lim\limits_{n\in\mathbf{N}} (y_n - x_n) = 0.$

Alors, les deux suites $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ et $(y_n)_{n\in\mathbf{N}}$ sont convergentes, et de plus elles convergent vers la même limite.

Une dernière propriété

On rappelle aussi la propriété suivante, dite *propriété d'Archimède* : pour tout $(x, y) \in \mathbf{R}^2$ tel que $y > 0$, il existe $N \in \mathbf{N}$ tel que $x \leqslant Ny$

On dit que $\mathbf{R}$ est archimédien.

En résumé, on a le théorème suivant.

Théorème

L'ensemble $\mathbf{R}$ est un corps totalement ordonné, archimédien et tel que toute suite d'éléments de $\mathbf{R}$ croissante et majorée converge dans $\mathbf{R}$.

Intervalles de R

Définition

Soit $(a,b) \in \boldsymbol{R}^2$ *tels que* $a \leqslant b$, *on appelle* <u>*segment* $[a,b]$</u> *l'ensemble des réels compris, au sens large entre* a *et* b *:*

$$[a,b] = \{x \in \boldsymbol{R} \,|\, a \leqslant x \leqslant b\}$$

On dit que a *et* b *sont les* <u>*bornes*</u> *du segment* $[a,b]$.

Définition

Soit $I \subset \boldsymbol{R}$, *on dit que* I *est un* <u>*intervalle*</u> *si pour tout* $(x,y) \in I^2$ *tel que* $x \leqslant y$, $[x,y] \subset I$.

Intervalles de $\mathbf{R}$

Les intervalles sont exactement les parties d'une des formes suivantes, avec $a, b \in \mathbf{R}$:

- $[a, b] = \{x \in \mathbf{R} \mid a \leqslant x \leqslant b\}$ avec $a \leqslant b$
- $[a, +\infty[= \{x \in \mathbf{R} \mid x \geqslant a\}$
- $]-\infty, b] = \{x \in \mathbf{R} \mid x \leqslant b\}$
- $]a, b[= \{x \in \mathbf{R} \mid a < x < b\}$ avec $a < b$
- $]a, b] = \{x \in \mathbf{R} \mid a < x \leqslant b\}$ avec $a < b$
- $[a, b[= \{x \in \mathbf{R} \mid a \leqslant x < b\}$ avec $a < b$
- $]a, +\infty[= \{x \in \mathbf{R} \mid x > a\}$
- $]-\infty, b[= \{x \in \mathbf{R} \mid x < b\}$
- $\mathbf{R}$