Feuille n° 3 : Intégrales impropres

Exercice 1 Étudier la nature des intégrales impropres suivantes et calculer la valeur des intégrales convergentes :

1. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \sin t\,dt$
2. $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-x}\,dx$
3. $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-|x|}\,dx$
4. $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t}\cos t\,dt$
5. $\displaystyle\int_0^{1} \ln x\,dx$
6. $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\ln x}{x^2}\,dx$
7. $\displaystyle\int_0^{1} \frac{dx}{1-x^2}$

Exercice 2 Déterminer si les intégrales impropres suivantes sont absolument convergentes :

1. $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{x^2}\,dx$
2. $\displaystyle\int_0^{1} t\ln t\,dt$
3. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^x}{1+x^2}\,dx$
4. $\displaystyle\int_0^{1} \frac{\ln(t)}{t^{1/2}}\,dt$
5. $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-x}\left(2+3\cos^9 x\right)\,dx$
6. $\displaystyle\int_0^{1} \cos\left(\frac{1}{t}\right)dt$
7. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-x}}{\sqrt{x}}\,dx$

Exercice 3 On considère la fonction $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ définie par $f(x)=\dfrac{x}{x^2+8x+20}$.

1. Pourquoi la fonction f est-elle définie et continue sur $\mathbb{R}$?
2. Prouver que l'intégrale impropre $\displaystyle\int_1^{+\infty} f(x)\,dx$ diverge vers $+\infty$.
3. Prouver que l'intégrale impropre $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{x\,dx}{(x^2+8x+20)^2}$ converge.

Exercice 4 La fonction gamma.

1. Déterminer l'ensemble de définition de la fonction $\Gamma\colon x\longmapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}\,dt$.
2. Montrer que, pour tout $x>0$, $\Gamma(x+1)=x\Gamma(x)$.
3. Pour tout $n\in\mathbb{N}$, calculer $\Gamma(n+1)$.

Exercice 5 Soit $f:[0,+\infty[\to\mathbb{R}$ une fonction continue.

1. On suppose que f admet une limite ℓ en $+\infty$.
   (a) Montrer que si l'intégrale $\int_0^{+\infty} f(t)\,dt$ converge alors $\ell=0$.
   (b) La condition $\ell=0$ suffit-elle à garantir la convergence de l'intégrale $\int_0^{+\infty} f(t)\,dt$?
2. Donner un exemple de fonction continue $f:[0,+\infty[\to\mathbb{R}$ à valeurs positives et non bornée (et donc telle que f ne tend pas vers 0 en $+\infty$) telle que l'intégrale $\int_0^{+\infty} f(t)\,dt$ converge.

Exercice 6 Déterminer la nature des intégrales suivantes :

1. $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\arctan(x)}{x\ln(2+x^2)}\,dx$
2. $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-\sqrt{t}}\,dt$
3. $\displaystyle\int_1^{+\infty} e^{-\sqrt{\ln(t)}}\,dt$
4. $\displaystyle\int_0^{1} \frac{\operatorname{ch} x-\cos x}{x^{5/2}}\,dx$
5. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sqrt{x}\,\sin\left(1/x^2\right)}{\ln(1+x)}\,dx$
6. $\displaystyle\int_{3/\pi}^{+\infty} \ln\left(\cos\left(\frac{1}{t}\right)\right)dt$
7. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{(t+1)^{1/4}-t^{1/4}}{t^{1/3}}\,dt$
8. $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{t}{e^{\sin t}-1}\,dt$

Exercice 7 Donner une condition nécessaire et suffisante sur $a\in\mathbb{R}$ pour la convergence de l'intégrale impropre $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t-\sin t}{t^a}\,dt$.

Exercice 8 Discuter, selon les valeurs du paramètre $\alpha\in\mathbb{R}$, la convergence des intégrales généralisées suivantes :

1. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t\ln t}{(1+t^2)^\alpha}\,dt$
2. $\displaystyle\int_0^{+\infty} x^\alpha\ln(x+e^{\alpha x})\,dx$
3. $\displaystyle\int_2^{+\infty} \left(\sqrt{x^4+x^2+1}-x\sqrt[3]{x^3+\alpha x}\right)dx$ où $\alpha\in[-4,+\infty[$.

Exercice 9

1. Montrer que l'intégrale généralisée $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{\ln(t)}{1+t^2}\,dt$ converge.
2. En utilisant un changement de variable, montrer que $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{\ln(t)}{1+t^2}\,dt=0$.
3. En déduire que, pour tout $a>0$, $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{\ln(t)dt}{a^2+t^2}=\frac{\pi\ln(a)}{2a}$.

Exercice 10 L'objectif de cet exercice est d'étudier $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(y)}{y}\,dy$ et de calculer sa valeur.

1. Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(y)}{y}\,dy$ est convergente.
2. On montre maintenant que l'intégrale est semi-convergente.
   (a) Montrer que pour tout $t \in \mathbb{R}$, $|\sin t| \geq \sin^2 t$.
   (b) Démontrer que l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\cos(2t)}{t}\,dt$ est convergente.
   (c) En déduire que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{|\sin(y)|}{y}\,dy$ diverge.
3. On considère la fonction $f\colon]0, \frac{\pi}{2}] \to \mathbb{R}$, $y \mapsto \frac{1}{y} - \frac{1}{\sin(y)}$.
   (a) Montrer que f se prolonge en une fonction $\mathcal{C}^1$ sur $[0, \frac{\pi}{2}]$.
   On notera toujours f ce prolongement.
   (b) En déduire que $\displaystyle\int_0^{\pi/2} f(y)\sin(ny)\,dy$ converge vers 0 quand n tend vers $+\infty$.
4. Pour tout entier $n \geq 0$, on pose $J_n = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{\sin((2n+1)y)}{\sin(y)}\,dy$.
   (a) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'intégrale J_n converge.
   (b) Montrer que la suite $(J_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(y)}{y}\,dy$.

   On rappelle que pour tous réels a et b, $\sin a - \sin b = 2\sin\left(\frac{a-b}{2}\right)\cos\left(\frac{a+b}{2}\right)$.

   (c) Montrer que la suite $(J_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est constante, puis conclure.

Exercice 11 **Intégrales de Wallis et intégrale de Gauss.**

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $W_n = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \sin^n x\,dx$.
   (a) Montrer que la suite $(W_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et strictement positive.
   (b) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $(n+2)W_{n+2} = (n+1)W_n$.
   (c) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a
   $$1 \leq \frac{W_n}{W_{n+1}} \leq \frac{n+2}{n+1}.$$
   (d) Montrer que la suite $\left(\frac{W_n}{W_{n+1}}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et déterminer sa limite.
   (e) On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_n = (n+1)W_{n+1}W_n$. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est constante et déterminer u_n pour tout $n \in \mathbb{N}$.
   (f) Déduire des questions précédentes $\lim\limits_{n\to+\infty} nW_n^2$ puis $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt{n}W_n$.
2. (a) Montrer que pour tout $x \in]-1, +\infty[$, on a : $\ln(1+x) \leq x$.
   (b) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a
   $$\forall t \in [0, \sqrt{n}],\ \left(1 - \frac{t^2}{n}\right)^n \leq e^{-t^2} \leq \left(1 + \frac{t^2}{n}\right)^{-n}.$$
   (c) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a
   $$\int_0^{\sqrt{n}} \left(1 - \frac{t^2}{n}\right)^n dt = \sqrt{n}\int_0^{\pi/2} \sin^{2n+1} u\,du.$$
   On pourra poser $t = \sqrt{n}\cos u$.
   (d) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a
   $$\int_0^{\sqrt{n}} \left(1 + \frac{t^2}{n}\right)^{-n} dt = \sqrt{n}\int_{\pi/4}^{\pi/2} \sin^{2n-2} u\,du.$$
   On pourra poser $t = \sqrt{n}\,\mathrm{cotan}(u)$.
   (e) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a :
   $$\sqrt{n}\,W_{2n+1} \leq \int_0^{\sqrt{n}} e^{-t^2} dt \leq \sqrt{n}\,W_{2n-2}.$$
   (f) Démontrer la convergence de l'intégrale de Gauss définie par $I = \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\,dt$ et déterminer sa valeur.

Exercice 12

1. Justifier que pour tout réel $x > 0$, l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{e^{-xt}}{t^2}\,dt$ converge.
   Que pouvez-vous dire dans le cas où $x \leq 0$?

On définit alors la fonction φ sur $\mathbb{R}_+^*$ par, pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$,
$$\varphi(x) = \int_1^{+\infty} \frac{e^{-xt}}{t^2}\,dt.$$

2. (a) Montrer que la fonction φ est décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$.
   (b) Déterminer la limite de φ en $+\infty$.
3. (a) Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, $\varphi(x) = x\displaystyle\int_x^{+\infty} \frac{e^{-u}}{u^2}\,du$.
   (b) En déduire que φ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et déterminer φ'.
   (c) Retrouver alors le résultat de la question 2.(a).
4. (a) Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$,
   $$\varphi(x) = \frac{e^{-x}}{x} - \frac{2}{x}\int_1^{+\infty} \frac{e^{-xt}}{t^3}\,dt.$$
   (b) En déduire un équivalent simple de $\varphi(x)$ quand x tend vers $+\infty$.