Université Claude Bernard - Lyon 1 Semestre d'automne 2024-2025
Analyse 3

Feuille n^o 4 : Séries numériques

Exercice 1 Étudier la nature des séries suivantes, puis calculer leur somme quand c'est possible :

1. $\displaystyle\sum_{n\geq 0} \frac{1}{n+100}$;
2. $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \ln \frac{n}{n+1}$;
3. $\displaystyle\sum_{n\geq 0} e^{-n}$;
4. $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n(n+4)}$;
5. $\displaystyle\sum_{n\geq 0} \frac{2^n}{n!}$;
6. $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{n}{(n+1)!}$.

Exercice 2 Étudier la nature des séries suivantes :

1. $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{3}{5^n+2}$;
2. $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{1}{(n^3+10)^{1/4}}$;
3. $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^n}$;
4. $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$;
5. $\displaystyle\sum_{n\geq 0} \frac{n^2}{e^n}$;
6. $\displaystyle\sum_{n\geq 2} \frac{1}{n\ln n}$;
7. $\displaystyle\sum_{n\geq 2} \frac{1}{n(\ln n)^2}$;
8. $\displaystyle\sum_{n\geq 2} \frac{1}{(\ln n)^n}$;
9. $\displaystyle\sum_{n\geq 0} \frac{n!}{(2n)!}$;
10. $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{n^3}{(\ln 2)^n}$;
11. $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{1}{\sqrt{n^3+3}}$;
12. $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{\ln n}{n^2+1}$.

Exercice 3 Étudier la nature des séries suivantes :

1. $\sum_{n\geq 2} \frac{1}{(\ln n)^{10}}$;
2. $\sum_{n\geq 2} \frac{(-1)^n}{n\ln n}$;
3. $\sum_{n\geq 1} e^{\frac{1}{\sqrt{2n-1}}}-1$;
4. $\sum_{n\geq 1} \frac{\arctan n}{n^2+1}$;
5. $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n}\sin\frac{\pi}{\sqrt{2n}}$;
6. $\sum_{n\geq 2} \frac{\sqrt[3]{n^4+1}}{n\sqrt{n-1}}$;
7. $\sum_{n\geq 0} \frac{(-1)^n(n+1)}{3^n}$;
8. $\sum_{n\geq 1} e^{-\sqrt{n}}$;
9. $\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n(n+1)}{2n+1}$;
10. $\sum_{n\geq 1} \left(\frac{n+3}{2n+1}\right)^{n\ln n}$;
11. $\sum_{n\geq 2} \frac{1}{n+(-1)^n\sqrt{n}}$;
12. $\sum_{n\geq 1} \left(1-\cos\frac{1}{n}\right)$;
13. $\sum_{n\geq 1} \frac{\sqrt{n(n-1)}}{n^3-2\sqrt{n}+3\ln n}$;
14. $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{\sqrt{n^2-1}}-\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}$;
15. $\displaystyle\sum_{n\geq 1} e-\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$.

Exercice 4
On pose, pour $n\geq 2$, $u_n=\dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}+(-1)^n}$ et, pour tout $n\geq 1$, $v_n=\dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$.

1. Montrer que u_n et v_n sont équivalentes.
2. Étudier la nature de la série de terme général v_n.
3. (a) Pourquoi le théorème sur les séries alternées ne s'applique-t-il pas à la série de terme général u_n ?
   (b) Montrer que la série de terme général u_n diverge.
   (Indication : on pourra utiliser un développement limité de $t\to\dfrac{1}{1+t}$ en 0)
4. Pourquoi le théorème sur les séries dont les termes généraux sont équivalents ne s'applique pas pour $\sum u_n$ et $\sum v_n$?

Exercice 5 Soit $f\colon[0,1]\to\mathbb{R}$ une fonction continue. On pose, pour tout $n\in\mathbb{N}$, $u_n=(-1)^n\displaystyle\int_0^1 x^n f(x)\,dx$. Pour tout $n\in\mathbb{N}$, on note S_n la somme partielle d'ordre n de la série de terme général u_n.

1. Pour tout $n\in\mathbb{N}$, justifier l'existence de $\displaystyle\int_0^1 x^n f(x)\,dx$.
2. Montrer que, pour tout $n\in\mathbb{N}$,
$$S_n-\int_0^1\frac{f(x)}{1+x}\,dx=\int_0^1\frac{(-1)^n x^{n+1}}{1+x}f(x)\,dx.$$
3. Montrer que la série de terme général u_n converge et calculer sa somme.

Exercice 6 [Constante d'Euler]
On considère la suite $(u_p)_{p\geq 1}$ définie, pour tout entier $p\geq 1$, par
$$u_p=\frac{1}{p}-\int_p^{p+1}\frac{dt}{t}.$$
On note, pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, $H_n=\displaystyle\sum_{k=1}^n\frac{1}{k}$ et $S_n=\displaystyle\sum_{p=1}^n u_p$.

1. Montrer que, pour tout $p\geq 1$, $0\leq u_p\leq\dfrac{1}{p}-\dfrac{1}{p+1}$.
2. En déduire que la série de terme général u_p converge et que sa somme γ vérifie $0\leq\gamma\leq 1$.
3. Montrer que, pour tout $p\geq 1$,
$$u_p=\frac{1}{p}\int_0^1\frac{u}{p+u}\,du.$$
4. En déduire que, pour tout $p\geq 2$,
$$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{p+1}\right)\leq u_p\leq\frac{1}{2}\left(\frac{1}{p-1}-\frac{1}{p}\right).$$

5. Pour tout entier $n \geq 1$, on note $R_n = \sum_{p=n+1}^{+\infty} u_p$.

   Déterminer un équivalent de R_n quand n tend vers $+\infty$.
6. (a) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, déterminer une relation entre H_n et S_n.

   (b) Montrer que :
$$H_n = \ln n + \gamma + \frac{1}{2n} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n}\right).$$
7. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $T_n = S_n + \dfrac{1}{2n+2}$.

   (a) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $0 \leq \gamma - T_n \leq \dfrac{1}{2n(n+1)}$.

   (b) Déterminer un entier naturel n_0 pour lequel T_{n_0} est une valeur approchée de γ à 10^{-2} près.

Exercice 7 [Exemples de produits de Cauchy de deux séries]

1. (a) Montrer que la série de terme général $\dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ est semi-convergente.

   (b) Montrer que le produit de Cauchy de la série $\sum \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ par elle-même diverge.
   On pourra remarquer que pour tout entier $n \geq 1$ et tout entier k compris entre 1 et $n-1$, on a $k(n-k) \leq (n-1)^2$.
2. Soit a et b deux réels. On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n = \dfrac{a^n}{n!}$ et $b_n = \dfrac{b^n}{n!}$.

   (a) Montrer que les séries $\sum a_n$ et $\sum b_n$ sont absolument convergentes.

   On note c_n le terme général de la série obtenue quand on fait le produit de Cauchy des séries $\sum a_n$ et $\sum b_n$.

   (b) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, calculer c_n en fonction de n.

   (c) En déduire que $\exp(a+b) = \exp(a) \times \exp(b)$.

Exercice 8 Quelle est la nature de la série $\sum \frac{1}{\sqrt{n}}$? Donner un équivalent de $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}}$ quand n tend vers $+\infty$.

Exercice 9 Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels positifs telle que la série de terme général u_n converge. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $R_n = \displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k$.

1. Justifier que la suite $(R_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante, convergente et déterminer sa limite.
2. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,
$$\sum_{k=0}^{n} R_k = (n+1)R_n + \sum_{k=0}^{n} k u_k.$$
   En déduire que si la série $\sum_{n\geq 0} R_n$ converge, alors la série $\sum_{n\geq 0} n u_n$ converge.
3. On suppose que la série $\sum_{n\geq 0} n u_n$ converge.

   (a) Que vaut $\lim_{n\to+\infty} (n+1)R_n$?

   (b) En déduire que la série de terme général R_n converge.