Université Claude Bernard - Lyon 1 Semestre d'automne 2024-2025
Analyse 3

Programme et exercices de révision pour le partiel du 6 novembre

---

Le partiel sera constitué d'une question de cours sur les chapitres 1 et 2 (cf démonstrations à connaître) et d'exercices portant sur les notions et pratiques travaillées dans les fiches 1 à 2 de TD.

Préparer vos questions pour la séance de soutien mercredi 23 octobre de 9h45 à 11h15.

1 Démonstrations à travailler et à connaître

1. Énoncé et preuve du théorème de caractérisations de la borne supérieure.
2. Énoncé et preuve du théorème des bornes atteintes.
3. Énoncé et preuve du théorème fondamental (du calcul intégral).
4. Preuve de la convergence des sommes de Riemann et de la majoration de l'erreur dans le cas d'une fonction $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ de classe C^1.

2 Liste non exhaustive de compétences attendues

Il faut faire attention à la qualité et la précision de la rédaction (bonne utilisation des quantificateurs en particulier).

1. Écrire des énoncés mathématiques corrects (variables bien introduites, distinction claire entre "pour tout" et "il existe"...)
2. Savoir manipuler des inégalités, savoir majorer, savoir minorer.
3. Savoir justifier qu'un ensemble admet une borne supérieure et en connaître les différentes caractérisations.
4. Savoir manipuler les définitions de limite, de continuité, de continuité uniforme. Savoir justifier qu'une suite converge vers un réel ℓ, qu'une fonction est continue en un point a, qu'une fonction est uniformément continue.
5. Reconnaître un théorème « classique » à utiliser et savoir vérifier proprement ses hypothèses : « toute suite réelle croissante majorée est convergente », théorème des valeurs intermédiaires, théorème des bornes atteintes, théorème des accroissements finis, théorème de Taylor-Lagrange.
6. Connaître et savoir utiliser les propriétés de l'intégrale de Riemann (linéarité, monotonie, relation de Chasles, inégalité triangulaire).
7. Savoir calculer des intégrales ou primitives simples, en utilisant si besoin un développement en éléments simples des fractions rationnelles, une intégration par parties, un changement de variables.

3 Exercices issus d'annales

Exercice 1. `Borne supérieure`
On considère l'ensemble X suivant :

$$X = \left\{ \frac{(-1)^n}{n} + \frac{2}{n}; \quad n \in \mathbf{N}^* \right\}.$$

1. Montrer que X est majoré et minoré.
2. Montrer que X admet un plus grand élément et le déterminer.
3. Montrer que X admet une borne supérieure et une borne inférieure et les déterminer.

Exercice 2. `Etude d'une suite`
Soit $a \in]0, 1]$ et $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ la suite réelle définie par

$$u_0 = a \text{ et pour tout } n \in \mathbf{N},\ u_{n+1} = \frac{u_n}{2} + \frac{u_n^2}{4}.$$

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbf{N}$, $u_n \in]0, 1]$.
2. Montrer que la suite $(u_n)_{n\mathbf{N}}$ est décroissante.
3. En déduire que la suite converge et déterminer sa limite.

Exercice 3. `Irrationalité de` e

Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $I_n = \displaystyle\int_0^1 x^n e^x \, dx$.

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $I_n > 0$.
2. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $I_n \leq \dfrac{e}{n+1}$.
3. Pour $n \in \mathbb{N}$, trouver une relation entre I_{n+1} et I_n.
4. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe des entiers relatifs a_n et b_n tels que
$$I_n = a_n e + b_n.$$
5. Supposons que e est rationnel et considérons alors deux entiers naturels non nuls p et q tels que $e = \dfrac{p}{q}$.
   (a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $I_n \geq \dfrac{1}{q}$.
   (b) En déduire une contradiction et conclure.

Exercice 4. `Le calcul d'une intégrale par un changement de variable`

En utilisant le changement de variable $t = \sqrt{x-1}$ calculer $\displaystyle\int_5^{10} \frac{\mathrm{d}x}{(x-2)\sqrt{x-1}}$.

Exercice 5. `Étude d'une suite. Détermination de la borne inférieure et de la borne supérieure d'une partie.`

On considère la suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par

$$u_0 = 1 \text{ et pour tout } n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \sin(u_n).$$

1. Montrer que pour tout $x \in]0,1]$, il existe $c \in]0,x[$ tel que $\sin x = x\cos c$.
2. En déduire que pour tout $x \in]0,1]$, $\sin x < x$.
3. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 < u_n \leq 1$.
4. Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente et déterminer sa limite.
5. Montrer que la partie

$$A = \left\{1 - \frac{1}{k+u_n} : k \in \mathbb{N}^*,\ n \in \mathbb{N}\right\}.$$

admet une borne supérieure et une borne inférieure et les déterminer.

Exercice 6. `Autour de la continuité`

1. On considère une fonction continue $f : [0,+\infty[\to \mathbf{R}$ qui admet une limite finie ℓ en $+\infty$. Le but de cette question est de montrer que f est uniformément continue. Soit $\varepsilon > 0$.
   (a) Montrer qu'il existe un réel $A \geq 0$ tel que
   $$\forall x, y \geq A, \quad |f(y) - f(x)| \leq \varepsilon.$$
   (b) Montrer qu'il existe $\delta \in]0,1[$ tel que
   $$\forall x, y \in [0, A+1], \quad |y - x| \leq \delta \Rightarrow |f(y) - f(x)| \leq \varepsilon.$$
   (c) En déduire que
   $$\forall x, y \in [0, +\infty[, \quad |y - x| \leq \delta \Rightarrow |f(y) - f(x)| \leq \varepsilon,$$
   et conclure.
2. Dire si la fonction $g : \begin{array}{rcl} [2,+\infty[& \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & 1/x \end{array}$ est uniformément continue.