Correction des exercices de probabilité

C. Bardel

PASS – Septembre 2024

Exercices de probabilité

Notion d'événement

Énoncé

Soit un groupe de 3 personnes. On note G_i l'évènement « L'individu i est vacciné contre la grippe ». Soient les deux évènements suivants :

— E_1 : « Au moins un individu est vacciné contre la grippe »
— E_2 : « Au moins 2 individus sont vaccinés contre la grippe »

1. Quels sont les évènements complémentaires de E_1 et E_2 ?
2. Exprimez les évènements E_1 et E_2 à l'aide de G_i

Correction

1. $\overline{E_1}$: « Aucun individu n'est vacciné contre la grippe »
   $\overline{E_2}$: « 0 ou 1 individu est vacciné contre la grippe »
2. Expression de E_1 et E_2
   — $E_1 = G_1 \cup G_2 \cup G_3$

   — $E_2 = (G_1 \cap G_2 \cap \overline{G_3}) \cup (G_1 \cap \overline{G_2} \cap G_3) \cup (\overline{G_1} \cap G_2 \cap G_3) \cup (G_1 \cap G_2 \cap G_3)$

Calcul de probabilité

Énoncé

Dans une population, 45% des personnes interrogées déclarent pratiquer une activité sportive, 30% déclarent être fumeurs. Par ailleurs, 10% déclarent être à la fois fumeurs et pratiquer une activité sportive. Si on prend un individu au hasard dans cette population, quelle est la probabilité qu'il ne soit ni sportif, ni fumeur ?

Correction

évènement F : « être fumeur » et évènement $\bar{F}$ « ne pas être fumeur »
évènement S : « pratiquer un sport » et évènement $\bar{S}$ « ne pas pratiquer de sport »
Données de l'énoncé : $\mathsf{P}(F) = 0.3 \quad \mathsf{P}(S) = 0.45 \quad \mathsf{P}(F \cap S) = 0.10$
On cherche $\mathsf{P}\big(\bar{F} \cap \bar{S}\big)$.

— **Solution 1 :** remplir un tableau
En bleu : les valeurs de l'énoncé

$\cap$	F	$\bar{F}$	Total
S	0.1	0.35	0.45
$\bar{S}$	0.2	**0.35**	0.55
Total	0.30	0.70	1

On calcule les valeurs en noir de la façon suivante :

— $\mathsf{P}(\bar{S})$= 1-$\mathsf{P}(S)$ = 1-0.55 = 0.45
— $\mathsf{P}(\bar{F})$=1-$\mathsf{P}(F)$=1-0.3=0.7
— $\mathsf{P}(S)$=$\mathsf{P}(S \cap F)$ + $\mathsf{P}(S \cap \bar{F})$ (cf démo de la formule des probabilité totales, plus loin dans le cours)
D'où, $\mathsf{P}(S \cap \bar{F})$= $\mathsf{P}(S)$ - $\mathsf{P}(S \cap F)$ = 0.45-0.1 = 0.35
— $\mathsf{P}(\bar{F})$=$\mathsf{P}(\bar{F} \cap S)$+$\mathsf{P}(\bar{F} \cap \bar{S})$
d'où, $\mathsf{P}(\bar{F} \cap \bar{S})$=$\mathsf{P}(\bar{F})$ - $\mathsf{P}(\bar{F} \cap S)$ (cf diapo 11) = 0.70 - 0.35 = 0.35

Dans le tableau, on lit $\mathsf{P}(\bar{F} \cap \bar{S})$ = 0.35

— **Solution 2 :** passer par l'évènement complémentaire
$\mathsf{P}(\bar{F} \cap \bar{S}) = 1 - \mathsf{P}\left(\overline{\bar{F} \cap \bar{S}}\right)$
Rappel : $\overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}$
$\mathsf{P}\left(\overline{\bar{F} \cap \bar{S}}\right) = \mathsf{P}(F \cup S)$
Or, $\mathsf{P}(F \cup S) = \mathsf{P}(F) + \mathsf{P}(S) - \mathsf{P}(F \cap S)$ (cf diapo 11)
Finalement, $\mathsf{P}(F \cup S) = 0.45 + 0.30 - 0.10 = 0.65$
D'où $\mathsf{P}(\bar{F} \cap \bar{S}) = 1 - 0.65 = 0.35$

Probabilités conditionnelles

Énoncé

Un nouveau vaccin a été testé sur 12500 personnes : 75 d'entre elles dont 35 femmes enceintes ont eu des réactions secondaires nécessitant une hospitalisation.

1. Sachant que ce vaccin a été administré à 680 femmes enceintes, quelle est la probabilité qu'une femme enceinte ait une réaction secondaire si elle reçoit le vaccin ?
2. Quelle est la probabilité qu'une personne non enceinte ait une réaction secondaire ?

Correction

On note E l'évènement « être enceinte » et R : « avoir une réaction secondaire »

Informations de l'énoncé :

Effectif	E	$\bar{E}$	Total
R	**35**	40	**75**
$\bar{R}$	645	11780	12425
Total	**680**	11820	**12500**

1. $\mathsf{P}(R|E) = \dfrac{\mathsf{P}(R \cap E)}{\mathsf{P}(E)}$
   $\mathsf{P}(R|E) = \dfrac{35/12500}{680/12500} = \dfrac{35}{680}$
   $\boxed{\mathsf{P}(R|E) = 0.051 \quad (5.1\%)}$
2. $\mathsf{P}\big(R|\bar{E}\big) = \dfrac{\mathsf{P}\big(R \cap \bar{E}\big)}{\mathsf{P}\big(\bar{E}\big)}$
   $\mathsf{P}\big(R|\bar{E}\big) = \dfrac{40/12500}{11820/12500} = \dfrac{40}{11820}$
   $\boxed{\mathsf{P}\big(R|\bar{E}\big) \simeq 0.003 \quad (0.3\%)}$

Formule des probabilités composées, formule des probabilités totales

Énoncé

Un groupe de 70 individus est constitué de 40 malades et 30 non malades. Respectivement 45% des malades et 30% des non malades sont fumeurs.
On notera M : « Être malade » et F : « Être fumeur »

1. Que représentent les valeurs 45% et 30% ?
2. Quelle est la probabilité qu'un individu soit un malade fumeur ?
3. Quelle est la probabilité qu'un individu soit fumeur ?

Correction

1. $\mathsf{P}(F|M) = 0.45$ et $\mathsf{P}\big(F|\overline{M}\big) = 0.30$
2. $\mathsf{P}(M \cap F)$?
   Formule des probabilités composées
   $\mathsf{P}(M \cap F) = \mathsf{P}(F \cap M) = \mathsf{P}(F|M) \times \mathsf{P}(M)$
   $\mathsf{P}(M \cap F) = 0.45 \times \frac{40}{70} \simeq 0.26$
3. $\mathsf{P}(F)$?
   Formule des probabilités totales
   $\mathsf{P}(F) = \mathsf{P}(F|M) \times \mathsf{P}(M) + \mathsf{P}\big(F|\overline{M}\big) \times \mathsf{P}\big(\overline{M}\big)$
   $\mathsf{P}(F) = 0.26 + 0.30 \times \frac{30}{70} \simeq 0.39$

Probabilités conditionnelles, probabilités totales, formule de Bayes

Énoncé

Un médecin examine les élèves d'un lycée pour déterminer leur aptitude au sport. Il constate que

— 1/3 des élèves est d'origine rurale, les autres étant citadins
— parmi les ruraux, la moitié présente une bonne aptitude au sport
— parmi les citadins, 40% présentent une bonne aptitude au sport

1. Si on prend un élève au hasard, quelle est la probabilité qu'il ait une bonne aptitude au sport ?

2. Si un élève a une bonne aptitude au sport, quelle est la probabilité pour qu'il soit d'origine rurale ? Pour qu'il soit citadin ?

Correction

Informations de l'énoncé :
R : « Être d'origine rurale » et S : « Avoir une bonne aptitude au sport »
$\mathsf{P}(R) = \frac{1}{3}$ $\quad \mathsf{P}(\overline{R}) = \frac{2}{3}$ $\quad \mathsf{P}(S|R) = 0.5$ $\quad \mathsf{P}(S|\overline{R}) = 0.4$

1. On cherche $\mathsf{P}(S)$
2. On cherche $\mathsf{P}(R|S)$ et $\mathsf{P}(\overline{R}|S)$

Correction

1. Probabilité d'avoir une bonne aptitude au sport

$\mathsf{P}(S) = \mathsf{P}(S \cap R) + \mathsf{P}(S \cap \overline{R})$

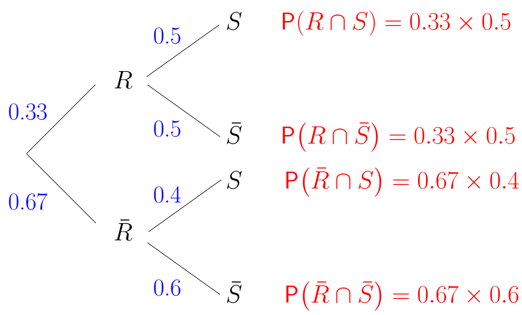
Or, $\mathsf{P}(S \cap R) = \mathsf{P}(S|R)\,\mathsf{P}(R)$
$\mathsf{P}(S \cap R) = 0.5 \times 0.33 = 0.165$

et $\mathsf{P}(S \cap \overline{R}) = \mathsf{P}(S|\overline{R})\,\mathsf{P}(\overline{R})$
$\mathsf{P}(S \cap \overline{R}) = 0.4 \times 0.67 = 0.278$

D'où, $\mathsf{P}(S) = 0.165 + 0.278 = 0.433$

Remarque : on utilise ici la formule des probabilités totales avec le système complet d'événements $\{R, \bar{R}\}$

Représentation graphique sous la forme d'un arbre :



Attention : les probabilités du premier niveau de l'arbre sont des probabilités simples ($\mathsf{P}(R) = 0.33$ et $\mathsf{P}(\bar{R} = 0.67)$ alors que les probabilités du 2è niveau de l'arbre sont des probabilités conditionnelles ($\mathsf{P}(S|R)\,, \mathsf{P}(S|\bar{R})\,,$ *etc.*)

Conclusion :
Pour un élève choisi au hasard, la probabilité d'avoir une bonne aptitude au sport vaut environ 0.43

2. $\mathsf{P}(R|S)$ et $\mathsf{P}(\overline{R}|S)$

$$\mathsf{P}(R|S) = \frac{\mathsf{P}(R \cap S)}{\mathsf{P}(S)}$$
$$\mathsf{P}(R|S) = \frac{0.165}{0.43}$$
$$\mathsf{P}(R|S) = 0.38$$

$$\mathsf{P}(\overline{R}|S) = 1 - \mathsf{P}(R|S)$$
$$\mathsf{P}(\overline{R}|S) = 1 - 0.38$$
$$\mathsf{P}(\overline{R}|S) = 0.62$$

Conclusion :
Pour un élève ayant une bonne aptitude au sport, la probabilité d'être d'origine rurale vaut 0.38 et la probabilité d'être citadin vaut 0.62

Remarque :
Cet exercice revient à utiliser la formule de Bayes, le dénominateur étant calculé dans la question 1.

Indépendance

Énoncé

Sur un grand nombre de naissances, on a pu estimer :
- la probabilité d'avoir un garçon : $\mathsf{P}(G) = 0.52$
- la probabilité d'avoir une fille : $\mathsf{P}(F) = 0.48$

Pour un couple qui a 3 enfants :

1. quelle est la probabilité d'avoir 3 garçons ?
2. quelle est la probabilité d'avoir au moins 1 fille ?
3. Quelle est la probabilité d'avoir au moins 2 filles ?

Correction

1. Avoir 3 garçons : $G_1 \cap G_2 \cap G_3$
   $\mathsf{P}(G_1 \cap G_2 \cap G_3) = \mathsf{P}(G_1)\,\mathsf{P}(G_2)\,\mathsf{P}(G_3)$ (indépendance)
   $\mathsf{P}(G_1 \cap G_2 \cap G_3) = 0.52^3 \simeq 0.14$
2. « Avoir au moins une fille » : complémentaire de « Avoir 3 garçons »
   $\mathsf{P}(\text{« Avoir au moins une fille »}) = 1 - 0.14 = 0.86$
3. « Avoir au moins 2 filles » = « Avoir 2 filles » ou « Avoir 3 filles »
   $\mathsf{P}(\text{« Avoir au moins 2 filles »}) = \mathsf{P}(\text{« Avoir 2 filles »}) + \mathsf{P}(\text{ « Avoir 3 filles »})$
   $\mathsf{P}(\text{« Avoir 2 filles »}) = \mathsf{P}(F_1 \cap F_2 \cap G_3) + \mathsf{P}(F_1 \cap G_2 \cap F_3) + \mathsf{P}(G_1 \cap F_2 \cap F_3)$
   $\mathsf{P}(\text{« Avoir 2 filles »}) = \mathsf{P}(F_1)\,\mathsf{P}(F_2)\,\mathsf{P}(G_3) + \mathsf{P}(F_1)\,\mathsf{P}(G_2)\,\mathsf{P}(F_3) + \mathsf{P}(G_1)\,\mathsf{P}(F_2)\,\mathsf{P}(F_3)$
   $\mathsf{P}(\text{« Avoir 2 filles »}) = 3 * (0.48 \times 0.48 \times 0.52) = 0.36$
   $\mathsf{P}(\text{« Avoir 3 filles »}) = \mathsf{P}(F_1 \cap F_2 \cap F_3) = 0.48^3 = 0.11$
   $\mathsf{P}(\text{« Avoir au moins 2 filles »}) = 0.36 + 0.11 = 0.47$

Exercices bilans sur les probabilités

Énoncé

L'ensemble des patients venant aux urgences d'un hôpital peuvent être classés en 3 catégories : médecine, chirurgie et psychiatrie. Le directeur de l'hôpital s'interroge sur la nécessité de recruter un chirurgien orthopédiste pour les urgences de son hôpital.

QCM 1 : Les adultes (âge > 15 ans) venant aux urgences de son hôpital se répartissent de la façon suivante : médecine 50%, chirurgie 40% et psychiatrie 10%. De plus, 3/4 des patients adultes chirurgicaux sont des patients digestifs et 1/4 des patients orthopédiques. La proportion d'adultes faisant appel à un chirurgien orthopédiste aux urgences est donc de :

A. 0.10
B. 0.25
C. 0.30
D. 0.40
E. 0.75

QCM 2 : Chez les enfants (âge <15 ans), la répartition des consultations est la suivante : médecine 55%, chirurgie 40% (dont la moitié en orthopédie) et psychiatrie 5%. Sachant qu'un patient venant aux urgences sur 5 a moins de 15 ans, dire la ou les propositions vraies :

A. parmi les patients venant aux urgences de cet hôpital, la proportion d'enfant nécessitant une consultation orthopédique est de 4%
B. parmi les patients venant aux urgences de cet hôpital, la proportion d'enfant nécessitant une consultation orthopédique est de 20%
C. parmi les enfants venant aux urgences de cet hôpital, la proportion nécessitant une consultation en orthopédie est des 4%
D. parmi les enfants venant aux urgences de cet hôpital, la proportion nécessitant une consultation en orthopédie est de 20%
E. Aucune des réponses proposées en A, B, C ou D n'est correcte

QCM 3 : Quelle est la proportion d'adultes parmi les patients aux urgences faisant appel à un chirurgien orthopédiste ?

A. $\frac{1}{4}$
B. $\frac{1}{3}$
C. $\frac{1}{2}$
D. $\frac{2}{3}$
E. $\frac{4}{5}$

Correction

QCM1 :
Soit O l'évènement « être un patient orthopédique »
Soit C l'évènement « être un patient chirurgical »
Dans cette question, on ne considère que les patients adultes (>15 ans).
Données de l'énoncé : $\mathsf{P}(C) = 0.4$ et $\mathsf{P}(O|C) = 1/4$
On cherche $\mathsf{P}(C \cap O)$ chez les adultes.
$\mathsf{P}(C \cap O) = \mathsf{P}(O|C) \times \mathsf{P}(C) = 0.4 \times 1/4 = 0.1$ (Formule des probas composées)
Réponse juste : A

QCM2 :
On note A l'évènement « être adulte »

Chez les enfants : $\mathsf{P}(C \cap O) = \mathsf{P}(O|C) \times \mathsf{P}(C) = 1/2 \times 0.4 = 0.2$
Dans la ligne ci-dessus, on est chez les enfants, donc “sachant que le patient est un enfant”. Comme au départ la population d'étude était l'ensemble des enfants, on n'écrivait pas le “sachant $\bar{A}$”. Si maintenant, on considère tous les patients (adultes + enfants), on écrira maintenant $\mathsf{P}\big(C \cap O|\bar{A}\big)$. On a donc :
$\mathsf{P}\big(\bar{A} \cap C \cap O\big) = \mathsf{P}\big(\bar{A}\big) \times \mathsf{P}\big(C \cap O|\bar{A}\big) = 1/5 \times 0.2 = 0.04$
Réponses justes : A et D

QCM3 :
Sachant que le patient a fait appel à un chirurgien orthopédiste, on cherche la probabilité que ça soit un adulte.

$$\mathsf{P}(A|(C \cap O)) = \frac{\mathsf{P}(A \cap C \cap O)}{\mathsf{P}(C \cap O)} = \frac{\mathsf{P}(A) \times \mathsf{P}(C \cap O|A)}{\mathsf{P}(C \cap O \cap A) + \mathsf{P}\big(C \cap O \cap \bar{A}\big)}$$

$$\mathsf{P}(A|(C \cap O)) = \frac{\mathsf{P}(A) \times \mathsf{P}(C \cap O|A)}{\mathsf{P}(A) \times \mathsf{P}(C \cap O|A) + \mathsf{P}\big(\bar{A}\big) \times \mathsf{P}\big(C \cap O|\bar{A}\big)}$$

$$\mathsf{P}(A|(C \cap O)) = \frac{4/5 \times 0.1}{4/5 \times 0.1 + 1/5 \times 0.2} = \frac{0.4}{0.4 + 0.2} = \frac{2}{3}$$

Réponse juste : D

Énoncé

Dans une population, deux maladies M1 et M2 sont présentes respectivement chez 10% et 20% des individus (le nombre de ceux qui souffrent des deux maladies est négligeable). On entreprend un dépistage systématique des maladies M1 et M2. Pour cela, on applique un test qui réagit à la maladie sur 90% des malades de M1, sur 70% des malades de M2 et sur 10% des individus qui n'ont aucune de ces deux affections.

1. Quand on choisit au hasard un individu de la population, quelle est la probabilité pour que le test réagisse ?
2. Sachant que pour cet individu, le test a réagi, donner les probabilités pour que ce soit à cause de la maladie M1, à cause de la maladie M2, sans qu'il n'ait l'une des deux maladies.

Correction

<u>Variable “maladie” à 3 modalités :</u>
M_1 : « être atteint par la maladie M1 »
M_2 : « être atteint par la maladie M2 »
M_0 : « être atteint ni par M1 ni par M2 »
<u>Variable « résultat du test » à 2 modalités :</u>
T^+ : « test positif » T^- : « test négatif »
<u>Données de l'énoncé :</u>
$\mathsf{P}(M_1) = 0.1$ et $\mathsf{P}(M_2) = 0.2$
$\mathsf{P}(T^+|M_1) = 0.9$
$\mathsf{P}(T^+|M_2) = 0.7$
$\mathsf{P}(T^+|M_0) = 0.1$

Tableau croisé :

$\cap$	M_1	M_2	M_0	Total
T^+				
T^-				
Total	0.10	0.20		1

On a $\mathsf{P}(M_1) + \mathsf{P}(M_2) + \mathsf{P}(M_0) = 1$
d'où : $\mathsf{P}(M_0) = 0.7$
On calcule ensuite les probabilités conjointes à partir des probabilités conditionnelles :
$\mathsf{P}(M_1 \cap T^+) = \mathsf{P}(T^+|M_1) \times \mathsf{P}(M_1)$
$\mathsf{P}(M_1 \cap T^+) = 0.9 \times 0.1 = 0.09$
$\mathsf{P}(M_2 \cap T^+) = 0.7 \times 0.2 = 0.14$
$\mathsf{P}(M_0 \cap T^+) = 0.1 \times 0.7 = 0.07$
On déduit alors les valeurs manquantes du tableau croisé :

$\cap$	M_1	M_2	M_0	Total
T^+	0.09	0.14	0.07	**0.30**
T^-	0.01	0.06	0.63	0.70
Total	0.10	0.20	0.70	1

1. Probabilité que le test réagisse
$\mathsf{P}(T^+) = = \mathsf{P}(T^+ \cap M_1) + \mathsf{P}(T^+ \cap M_2) + \mathsf{P}(T^+ \cap M_0)$
$\boxed{\mathsf{P}(T^+) = 0.30}$

Remarque : on peut directement utiliser la formule des probabilités totales avec le système complet d'événements $\{M_1, M_2, M_0\}$

2. $\mathsf{P}(\mathbf{M_1}|\mathbf{T}^+)$, $\mathsf{P}(\mathbf{M_2}|\mathbf{T}^+)$, $\mathsf{P}(\mathbf{M_0}|\mathbf{T}^+)$?
$\mathsf{P}\big(M_1|T^+\big) = \dfrac{\mathsf{P}(M_1 \cap T^+)}{\mathsf{P}(T^+)} = \dfrac{0.09}{0.3}$
$\mathsf{P}(M_1|T^+) = 0.3$
$\mathsf{P}\big(M_2|T^+\big) = \dfrac{0.14}{0.3} \simeq 0.47$
$\mathsf{P}\big(M_0|T^+\big) = \dfrac{0.07}{0.3} \simeq 0.23$
Remarque :
Ce calcul revient à utiliser la formule de Bayes, le dénominateur étant calculé lors de la question 1.

$$\mathsf{P}\big(M_i|T^+\big) = \frac{\mathsf{P}(M_i) \times \mathsf{P}(T^+|M_i)}{\displaystyle\sum_{j=0}^{2} \big[\mathsf{P}(M_j) \times \mathsf{P}\big(T^+|M_j\big)\big]}$$

Exercices sur les variables aléatoires

Espérance et variance

Énoncé

On évalue l'apport de la mesure de la concentration en hormone BNP et de la fraction d'éjection (EF) mesurée à l'échographie cardiaque pour le diagnostic de l'insuffisance cardiaque. Soient les va X et Y :

- $X = 1$ si $[BNF] \geq 100pg/ml$
- $X = 0$ sinon

- $Y = 1$ si $EF \leq 50\%$
- $Y = 0$ sinon

Loi de X :

x_i	0	1
$P(X = x_i)$	0.54	0.46

Loi de Y :

y_i	0	1
$P(Y = y_i)$	0.56	0.44

Parmi les propositions suivantes, lesquelles sont vraies ?

A. L'espérance de X vaut 0.46

B. L'écart-type de X vaut environ 0.25

C. L'espérance de Y vaut environ 0.25

D. On n'a pas assez d'informations pour calculer $\mathsf{E}(X+Y)$

E. $\mathsf{E}(X+Y) = 0.9$

Correction

Espérance de X :
$\mathsf{E}(X) = \sum_i x_i \times \mathsf{P}(X = x_i) = 0 \times 0.54 + 1 \times 0.46 = 0.46$
A est vrai
Écart-type de X :
$\mathsf{var}(X) = \mathsf{E}(X^2) - (\mathsf{E}(X))^2$
$\mathsf{E}(X^2) = \sum_i x_i^2 \times \mathsf{P}(X = x_i) = 0^2 \times 0.54 + 1^2 \times 0.46 = 0.46$
$(\mathsf{E}(X))^2 = 0.46^2 = 0.2116$
D'où $\mathsf{var}(X) = 0.46 - 0.2116 = 0.2484$
$\sigma_x = \sqrt{0.2484} = 0.498 \rightarrow$ **B est faux**
Espérance de Y :
$\mathsf{E}(Y) = 0 \times 0.56 + 1 \times 0.44 = 0.44$
C est faux
Espérance de $X + Y$
$\mathsf{E}(X+Y) = \mathsf{E}(X) + \mathsf{E}(Y) = 0.46 + 0.44 = 0.90$ **D est faux** et **E est vrai**

Loi binomiale

Énoncé

En période de pandémie grippale, on considère que 30% de la population est atteinte de la grippe. Quelle est la probabilité que strictement plus de 2 personnes soient malades dans un groupe de 10 personnes ?

Correction

Soit X la variable modélisant le statut de l'individu par rapport à la grippe.

- $X = 0$: individu non malade, $\mathsf{P}(X = 0) = 0.7$
- $X = 1$: inidvidu malade, $\mathsf{P}(X = 1) = 0.3$

$X \to Bern(0.3)$
Soit Y la va correspondant au nombre d'individus grippés dans un groupe de 10 personnes.
$Y = \sum_{i=1}^{10} X_i$ où les X_i sont indépendantes et suivent toutes la loi de Bernoulli de paramètre 0.3. Donc $Y \to \mathcal{B}(n, p)$ avec $n = 10$ et $p = 0.3$
Loi binomiale de paramètres n et p : $\mathsf{P}(X = k) = \mathsf{C}_n^k\,(p)^{\,k}\,(1-p)^{\,n-k}$
On cherche à calculer $\mathsf{P}(Y > 2)$:
$\mathsf{P}(Y > 2) = 1 - \mathsf{P}(Y \leq 2) = 1 - \mathsf{P}(Y = 0) - \mathsf{P}(Y = 1) - \mathsf{P}(Y = 2)$
$\mathsf{P}(Y = 0) = \mathsf{C}_{10}^0\,(0.3)^{\,0}\,(0.7)^{\,10-0} \simeq 0.028$
$\mathsf{P}(Y = 1) = \mathsf{C}_{10}^1\,(0.3)^{\,1}\,(0.7)^{\,10-1} \simeq 0.121$
$\mathsf{P}(Y = 2) = \mathsf{C}_{10}^2\,(0.3)^{\,2}\,(0.7)^{\,10-2} \simeq .2334$
$\mathsf{P}(Y \leq 2) = 0.028 + 0.121 + 0.233 = 0.382$
$\mathsf{P}(Y > 1) = 0.618$

Loi normale, calcul de probabilités, lecture dans les tables

Énoncé

On suppose que la glycémie des individus d'une population donnée est distribuée normalement, avec une moyenne de 1.00 g/L et un écart type de 0.03 g/L. On mesure la glycémie d'une personne choisie au hasard. Quelle est la probabilité que sa glycémie soit :

1. inférieure à 1.06 g/L
2. supérieure à 0.99 g/L
3. comprise entre 0.94 et 1.08 g/L
4. À partir de quelle valeur de glycémie, une personne fait-elle partie des 20% de personnes ayant la glycémie la plus élevée ?

Correction

Soit X la va correspondant à la glycémie d'un individu. $X \to \mathcal{N}(1, 0.03)$
La variable centrée réduite associée à X est $Z = \frac{X-1}{0.03}$

1. $\mathsf{P}(X \leq 1.06) = ?$

$$\begin{aligned} \mathsf{P}(X \leq 1.06) &= \mathsf{P}(X - 1 \leq 1.06 - 1) \text{ on centre} \\ &= \mathsf{P}\left(\tfrac{X-1}{0.03} \leq \tfrac{1.06-1}{0.03}\right) \text{ on réduit} \\ &= \mathsf{P}(Z \leq 2) = \Phi(2) \end{aligned}$$

On lit $\Phi(2)$ dans la table de la fonction de de répartition de la loi normale centrée réduite : $\Phi(2) = 0.9772$

$$\mathsf{P}(X \leq 1.06) \simeq 0.98$$

2. $\mathsf{P}(X \geq 0.99) = ?$

$$\begin{aligned} \mathsf{P}(X \geq 0.99) &= \mathsf{P}\big(\tfrac{X-1}{0.03} \leq \tfrac{0.99-1}{0.03}\big) \text{ on centre et on réduit} \\ &= \mathsf{P}(Z \geq -0.333) = 1 - \mathsf{P}(Z \leq 0.333) \\ &= 1 - \Phi(-0.333) \end{aligned}$$

La table de la fonction de répartition ne contient que des valeurs positives pour z. On utilise la formule $\Phi(-z) = 1 - \Phi(z)$

$\mathsf{P}(X \geq 0.99) = 1 - (1 - \Phi(0.333)) = \Phi(0.333) = 0.6293$

$$\mathsf{P}(X \geq 0.99) \simeq 0.63$$

3. $\mathsf{P}(0.94 \leq X \leq 1.08) = ?$

$$\textit{Rappel}: \ \mathsf{P}(a \leq X \leq b) = F(b) - F(a)$$

$$\begin{aligned} \mathsf{P}(0.94 \leq X \leq 1.08) &= \mathsf{P}\big(\tfrac{0.94-1}{0.03} \leq Z \leq \tfrac{1.08-1}{0.03}\big) \\ &= \mathsf{P}(-2 \leq Z \leq 2.67) \\ &= \Phi(2.67) - \Phi(-2) \\ &= \Phi(2.67) - (1 - \Phi(2)) \\ &= \Phi(2.67) + \Phi(2) - 1 \end{aligned}$$

Dans la table de la fonction de répartition, on lit :
- $\Phi(2) = 0.9772$
- $\Phi(2.67) = 0.9962$

$\mathsf{P}(0.94 \leq X \leq 1.08) = 0.9962 + 0.9772 - 1 = 0.9734$

$$\mathsf{P}(0.94 \leq X \leq 1.08) \simeq 0.97$$

4. On cherche x tel que $\mathsf{P}(X \geq x) = 0.2$

$$\begin{aligned} \mathsf{P}(X \geq x) = 0.2 &\Leftrightarrow \mathsf{P}\big(\tfrac{X-\mu}{\sigma} \geq \tfrac{x-\mu}{\sigma}\big) = 0.2 \\ &\Leftrightarrow \mathsf{P}\big(Z \geq \tfrac{x-1}{0.03}\big) = 0.2 \end{aligned}$$

On pose $z = \frac{x-1}{0.03}$.
On cherche la valeur de z tel que $\mathsf{P}(Z \geq z) = 0.2$
$\mathsf{P}(Z \geq z) = 0.2 \Leftrightarrow \mathsf{P}(Z < z) = 0.8$
On lit la valeur de z telle que $\mathsf{P}(Z < z) = 0.8$ dans la table 2
$z = 0.8416$
Or, $x = 0.03 \times z + 1$
d'où $x \simeq 1.025g/L$
Lorsqu'une personne a une glycémie qui dépasse 1.025g/L elle fait partie des 20% de personnes ayant la glycémie la plus élevée.

Remarque : dans cet exercice, on peut utiliser au choix la table 2 ou la table de la fonction de répartition. Ces deux tables sont équivalentes mais faites attention, elles ne se lisent pas de la même manière.

Approximation de la loi binomiale par une loi normale

Énoncé

Dans la population française, il y a environ 10% de gauchers. On tire au sort un échantillon de 100 individus et on compte le nombre de gauchers dans l'échantillon. Soit X la va représentant le nombre de gauchers dans l'échantillon. Quelle(s) proposition(s) est(sont) vraie(s) ?

A. X suit une loi binomiale

B. X suit une loi de Bernoulli

C. X suit approximativement une loi normale

D. La probabilité d'observer strictement plus de 16 gauchers dans l'échantillon vaut environ 2.3%

E. La probabilité d'observer moins de 16 gauchers dans l'échantillon vaut environ 2.3%

Correction

Soit Y la variable aléatoire « être gaucher »

- $Y = 0$ si l'individu n'est pas gaucher
- $Y = 1$ si l'individu est gaucher, $\mathsf{P}(Y = 1) = 0.10$

$Y \to Bern(p)$ avec $p = 0.1$

Soit X la variable aléatoire « nombre de gauchers dans l'échantillon de 100 individus »

$X = \sum_{i=1}^{100} Y_i$, avec les Y_i toutes indépendantes et suivant la même loi $Bern(0.1)$.

Donc $X \to \mathcal{B}(n, p)$ avec $n = 100$ et $p = 0.1$.

$n \times p = 10$ et $n \times (1 - p) = 90$

Nous sommes dans le cas où $n \geq 30$, $n \times p \geq 5$ et $n \times (1 - p) \geq 5$.

On peut **approximer** la loi binomiale par une loi normale de paramètres $\mu = np$ et $\sigma = \sqrt{np(1-p)}$.

Pour calculer $\mathsf{P}(X > 16)$, on utilisera donc la loi $\mathcal{N}(10, 3)$.

$\mathsf{P}(X \geq 16) = \mathsf{P}\big(Z \geq \frac{16-10}{3}\big) = \mathsf{P}(Z \geq 2) = 1 - \mathsf{P}(Z \leq 2) = 1 - \Phi(2)$

On lit la valeur de $\Phi(2)$ dans la table de la fonction de répartition.

$\mathsf{P}(X \geq 16) = 1 - 0.9772 = 0.0228 \simeq 0.023$

$\mathsf{P}(X \leq 16) = 1 - \mathsf{P}(X \geq 16) = 0.9772$

Réponses justes : A - C - D