Probabilités - Probabilités conditionnelles
Variables aléatoires et lois classiques

C. Bardel

PASS
Septembre 2024

Plan du cours

Expérience aléatoire

Expérience aléatoire

Expérience

- qui peut être **répété**
- qui a **plusieurs** résultats possibles
- dont le résultat est **imprévisible**

Exemples :

- lancé d'un dé à 6 faces
- observation du statut maladie d'un individu

Expérience aléatoire

Expérience aléatoire

Expérience

- qui peut être **répété**
- qui a **plusieurs** résultats possibles
- dont le résultat est **imprévisible**

Exemples :

- lancé d'un dé à 6 faces
- observation du statut maladie d'un individu

Évènement élémentaire

- **Résultat** d'une expérience aléatoire

Exemples :

- « Obtenir 3 lors du lancé d'un dé à 6 faces »
- « Être malade »

Ensemble fondamental = univers

Définition

- Ensemble de **tous les résultats possibles** (évènements élémentaires) d'une expérience aléatoire
- Noté Ω (ou S)

Exemple : lancé d'un dé à 6 faces, Ω={1,2,3,4,5,6}

Propriété

Ω peut être :

- un ensemble **fini**
  Exemple : statut vis à vis de la maladie, $\Omega = \{"M", "Non\ \ M"\}$
- un ensemble **infini dénombrable**
  Exemple : nombre de lancés avant d'obtenir face, $\Omega = \{1, 2, \ldots\}$
- un ensemble **infini indénombrable**
  Exemple : mesure du taux de cholestérol sanguin

Ω **discret** : Ω fini ou infini dénombrable
Ω **continu** : Ω infini indénombrable

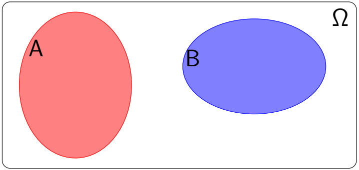
Évènement (non élémentaire)

Définition d'un événement (non élémentaire)

- un *sous-ensemble* de Ω

Exemple : évènement A « Obtenir un résultat strictement supérieur à 4 lors du lancé d'un dé à 6 faces »
$A = \{5{,}6\}$

Représentation ensembliste

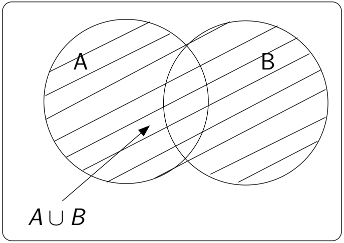


Évènements particuliers

- L'évènement total Ω est **certain** :
- L'ensemble vide $\varnothing$ est un évènement **impossible**

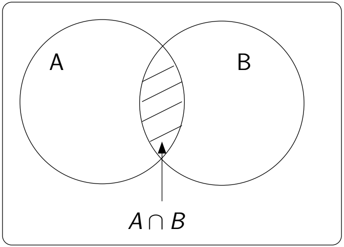
Opérations sur les évènements

Union



Notation : $(A \cup B)$ ou $(A$ ou $B)$
Définition : l'événement $A \cup B$ est réalisé dès que A ou B est réalisé

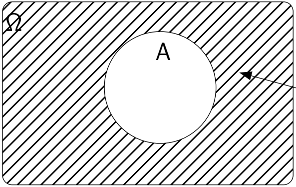
Intersection



Notation : $(A \cap B)$ ou $(A$ et $B)$ ou (A,B)
Définition : l'événement $A \cap B$ est réalisé dès que A est B sont réalisés dans la même expérience

Opérations sur les ensembles (2)

Complémentaire de A



Notation : $C(A)$ ou $\overline{A}$ ou (non A)

Définition : l'événement complémentaire de A contient tous les éléments de Ω qui ne sont pas dans A

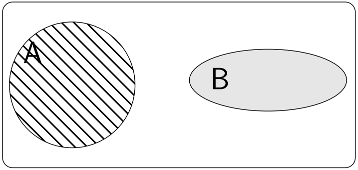
Complémentaire de $(A \cap B)$ et de $(A \cup B)$

- $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$
- $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$

Définitions

Évènements incompatibles

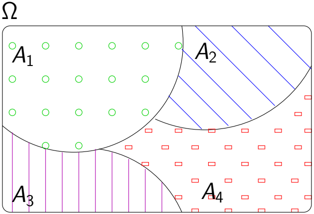
A et B sont dits *incompatibles* si $A \cap B = \varnothing$



Système complet d'évènements

On appelle *système complet d'évènements* toute partition de Ω, c'est à dire tout ensemble d'évènement (A_i) tel que :

- $\forall i, A_i \neq \varnothing$
- $\forall\ i \neq j, A_i \cap A_j = \varnothing$
  (évènements 2 à 2 incompatibles)
- $\bigcup_i A_i = \Omega$



Exemple

Exemple : lancé d'un dé à 6 faces

Évènement A : « Obtenir un résultat pair », $A = \{2; 4; 6\}$
Évènement B : « Obtenir un résultat ≥ 3 », $B = \{3; 4; 5; 6\}$
Évènement C : « Obtenir 5 », $C = \{5\}$
Évènement D : « Obtenir un résultat impair », $D = \{1; 3; 5\}$

- $\Omega = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$
- **Union** : $A \cup B = \{2; 3; 4; 5; 6\}$
- **Intersection** : $A \cap B = \{4; 6\}$
- **Complémentaire** de B : $\overline{B} = \{1; 2\}$
- $A \cap C = \varnothing$, A et C sont **incompatibles** (ou s'excluent mutuellement)
- A et D forment un **système complet d'évènements**
  - $A \neq \varnothing$ et $D \neq \varnothing$
  - $A \cap D = \varnothing$
  - $A \cup D = \Omega$

Probabilité

Définition

On appelle **probabilité** sur Ω, une application P qui à tout évènement A de Ω, associe un réel $P(A)$ **positif ou nul** tel que

- $P(\Omega) = 1$
- Si A et B sont **incompatibles** alors $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

Probabilité et fréquence

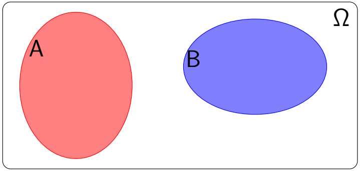
Exemple : croisement entre plantes hétérozygotes Aa pour un caractère à dominance stricte (a = allèle muté, récessif)

	Effectif n=50		Effectif n=1000		
Phénotype	Effectifs	Fréq.	Effectifs	Fréq.	Proba th.
sauvage	36	0,72	755	0,755	0,75
muté	14	0,28	245	0,245	0,25

Lorsque $n \to +\infty$, la fréquence relative tend vers la probabilité (loi des grands nombres)

Propriétés

Illustration



$$P(A) = \frac{\text{Surface de A}}{\text{Surface de } \Omega}$$

$P(\Omega) = 1$ (définition) $\quad P(\varnothing) = 0$

Propriétés

- $P(A) \leq 1$
- Si $A_1, A_2, \ldots A_n$ sont n évènements **incompatibles** 2 à 2 alors
$$P(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i)$$
- $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$
- Pour 2 évènements A et B, $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

Probabilité sur un ensemble Ω fini

Cas général

Si $\Omega = \{\omega_1; \omega_2; \dots; \omega_n\}$, pour définir une probabilité sur Ω il suffit de se donner *n nombres réels p_i* tels que

- $\forall i, p_i \geq 0$
- $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$

Les p_i sont les probabilités des évènements élémentaires $\{\omega_i\}$

Probabilité d'un évènement A quelconque

La probabilité d'un évènement A quelconque est la **somme des probabilités** des évènements élémentaires qui constituent A

Probabilité sur un ensemble Ω fini (2)

Cas particulier de l'équiprobabilité

Cas où tous les évènements élémentaires ont la **même probabilité**
Soit $\Omega = \{\omega_1; \omega_2; \ldots; \omega_n\}$, les probabilités des évènements élémentaires sont $p_1 = p_2 = \ldots = p_n = \frac{1}{n}$

La probabilité d'un évènement A quelconque s'écrit alors

$$\boxed{\mathrm{P}(A) = \frac{\text{nombre de cas favorables à la réalisation de } A}{\text{nombre de cas possibles de l'ensemble } \Omega}}$$

Les calculs de proba se ramènent à des problèmes de **dénombrement**

Probabilité sur un ensemble Ω fini (2)

Cas particulier de l'équiprobabilité

Cas où tous les évènements élémentaires ont la **même probabilité**
Soit $\Omega = \{\omega_1; \omega_2; \ldots; \omega_n\}$, les probabilités des évènements élémentaires sont $p_1 = p_2 = \ldots = p_n = \frac{1}{n}$

La probabilité d'un évènement A quelconque s'écrit alors

$$\boxed{\mathrm{P}(A) = \frac{\text{nombre de cas favorables à la réalisation de } A}{\text{nombre de cas possibles de l'ensemble } \Omega}}$$

Les calculs de proba se ramènent à des problèmes de **dénombrement**

Exemple : lancé d'un dé à 6 faces

$\Omega = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$
$A =$ « Obtenir un résultat strictement inférieur à 3 » $= \{1; 2\}$

$$\mathrm{P}(A) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

Plan du cours

Définition

Définition

Soit B un évènement de probabilité non nulle
Pour tout évènement A, on appelle **probabilité conditionnelle de A sachant que B est réalisé** le réel $\mathrm{P}(A|B)$ défini par :

$$\boxed{\mathrm{P}(A|B) = \frac{\mathrm{P}(A \cap B)}{\mathrm{P}(B)}}$$

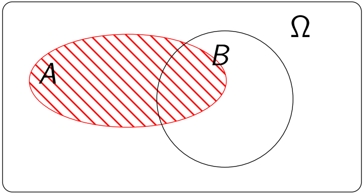
Notation : $\mathrm{P}(A|B)$ ou $\mathrm{P}_B(A)$

Exemples

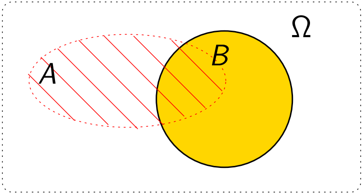
- Probabilité, pour un fumeur (B), de développer un cancer du poumon (A)
- Probabilité d'avoir la maladie d'Alzheimer (A) sachant que l'individu porte l'allèle *apoE4* (B) $\Rightarrow$ Notion de **pénétrance** : P(M|genotype)
- Sensibilité, spécificité d'un test diagnostique, VPP, VPN (cf cours)

Représentation graphique et propriétés

Représentation graphique



$\mathrm{P}(A)$



$$\mathrm{P}(A|B) = \frac{\mathrm{P}(A \cap B)}{\mathrm{P}(B)}$$

Propriétés

P_B vérifie toutes les propriétés des probabilités, en particulier

- $\mathrm{P}(\Omega|B) = 1$ et $\mathrm{P}(\varnothing|B) = 0$
- $\mathrm{P}\left(\overline{A}|B\right)$=1-$\mathrm{P}(A|B)$
- $\mathrm{P}(A_1 \cup A_2|B)$=$\mathrm{P}(A_1|B)$+$\mathrm{P}(A_2|B)$-$\mathrm{P}(A_1 \cap A_2|B)$

Remarques fondamentales

Quelques sources d'erreur classiques

- $A|B$ n'est pas un évènement
  Il n'existe pas d'évènements conditionnels !
- $\mathrm{P}(A|B) \neq \mathrm{P}(B|A)$
- Ne pas confondre $\mathrm{P}(A|B)$ et $\mathrm{P}(A \cap B)$

Formules des probabilités composées : probabilité de l'intersection d'évènements

Cas de 2 évènements A et B

De la définition des probabilités conditionnelles, on déduit

$$\boxed{\mathrm{P}(A \cap B) = \mathrm{P}(B) \times \mathrm{P}(A|B)}$$

De même $\mathrm{P}(B \cap A) = \mathrm{P}(A) \times \mathrm{P}(B|A)$
Or, $\mathrm{P}(A \cap B) = \mathrm{P}(B \cap A)$

$$\text{Donc } P(A \cap B) = P(B) \times P(A|B) = P(A) \times P(B|A)$$

Généralisation à n évènements

Soient n évènements $A_1, A_2, \ldots, A_n$

$$\boxed{\begin{aligned}\mathrm{P}(A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n) \quad = \quad & \mathrm{P}(A_1) \times \mathrm{P}(A_2|A_1) \times \mathrm{P}(A_3|A_1 \cap A_2) \times \ldots \\ & \ldots \times \mathrm{P}(A_n|A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_{n-1})\end{aligned}}$$

Formule des probabilités totales

Cas simple : partition de Ω en 2

A et $\overline{A}$ forment un *système complet d'évènements*.
Pour tout évènement B :

$$\boxed{\mathrm{P}(B) = \mathrm{P}(B|A) \times \mathrm{P}(A) + \mathrm{P}\left(B|\overline{A}\right) \times \mathrm{P}\left(\overline{A}\right)}$$

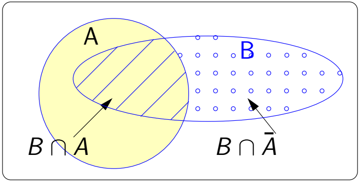
Formule des probabilités totales

Cas simple : partition de Ω en 2

A et $\overline{A}$ forment un *système complet d'évènements*.
Pour tout évènement B :

$$\boxed{\mathrm{P}(B) = \mathrm{P}(B|A) \times \mathrm{P}(A) + \mathrm{P}\left(B|\overline{A}\right) \times \mathrm{P}\left(\overline{A}\right)}$$

Démonstration (à retenir) :
$B = B \cap \Omega = B \cap (A \cup \overline{A})$
$B = (B \cap A) \cup (B \cap \overline{A})$
$(B \cap A)$ et $(B \cap \overline{A})$ sont incompatibles
donc $\mathrm{P}(B) = \mathrm{P}(B \cap A) + \mathrm{P}\left(B \cap \overline{A}\right)$



On applique la formule des probabilités composées et on obtient
$\mathrm{P}(B) = \mathrm{P}(B|A) \times \mathrm{P}(A) + \mathrm{P}\left(B|\overline{A}\right) \times \mathrm{P}\left(\overline{A}\right)$

Formule des probabilités totales (2)

Généralisation : partition de Ω en n

Si $\{A_1; A_2; \ldots; A_n\}$ forment un système complet d'évènements, alors pour tout évènement B, on a :

$$\boxed{\mathrm{P}(B) = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{P}(B|A_i) \times \mathrm{P}(A_i)}$$

La démonstration se fait de la même façon que dans le cas simple

Le théorème de Bayes

Principe

Exprimer $\mathrm{P}(A_j|B)$ en fonction des $\mathrm{P}(B|A_i)$ et de $\mathrm{P}(A_i)$

Exemple d'application : les tests diagnostiques
Connaissant la prévalence d'une maladie [$\mathrm{P}(M)$] et la probabilité qu'un test diagnostique soit positif chez les malades [$\mathrm{P}(T^+|M)$] et chez les individus sains [$\mathrm{P}\left(T^+|\overline{M}\right)$], calculer la probabilité qu'un individu soit malade si son test est positif [$\mathrm{P}(M|T^+) = \mathrm{VPP}$]

Énoncé du théorème dans le cas général

Soient $\{A_1; A_2; \ldots; A_n\}$ un système complet d'évènements et B un évènement de probabilité non nulle. Pour tout $j \in \{1; 2; \ldots; n\}$, on a :

$$\boxed{\mathrm{P}(A_j|B) = \frac{\mathrm{P}(A_j) \times \mathrm{P}(B|A_j)}{\mathrm{P}(B)} = \frac{\mathrm{P}(A_j) \times \mathrm{P}(B|A_j)}{\sum_{i=1}^{n} \mathrm{P}(A_i) \times \mathrm{P}(B|A_i)}}$$

Le théorème de Bayes (2)

Démonstration (cas simple)

Soient A et $\overline{A}$ un système complet d'évènements.

$$\mathrm{P}(A|B) = \frac{\mathrm{P}(A \cap B)}{\mathrm{P}(B)} \text{ (définition d'une proba conditionnelle)}$$

$$\mathrm{P}(A|B) = \frac{\mathrm{P}(A) \times \mathrm{P}(B|A)}{\mathrm{P}(B)} \text{ (numérateur : formule des probas composées)}$$

$$\mathrm{P}(A|B) = \frac{\mathrm{P}(A) \times \mathrm{P}(B|A)}{\mathrm{P}(A) \times \mathrm{P}(B|A) + \mathrm{P}\left(\overline{A}\right) \times \mathrm{P}\left(B|\overline{A}\right)} \quad \text{(dénominateur : formule des probas totales)}$$

Plan du cours

Indépendance de 2 évènements

Définition 1

2 évènements A et B de probabilité non nulle sont **indépendants** (relativement à la probabilité P) ssi

$$\boxed{\mathrm{P}(A|B) = \mathrm{P}(A)}$$

On a alors de la même façon $\mathrm{P}(B|A) = \mathrm{P}(B)$
La réalisation d'un des évènements n'a **pas d'influence** sur la probabilité de réalisation de l'autre évènement

Définition 2

A et B sont indépendants (relativement à la probabilité P) ssi

$$\boxed{\mathrm{P}(A \cap B) = \mathrm{P}(A) \times \mathrm{P}(B)}$$

Théorème

A et B indépendants $\Leftrightarrow$ A et $\overline{B}$ indépendants $\Leftrightarrow$ $\overline{A}$ et B indépendants $\Leftrightarrow$ $\overline{A}$ et $\overline{B}$ indépendants

Indépendance et incompatibilité

Deux notions différentes

- A et B **incompatibles** : $A \cap B = \varnothing$
  Ne fait pas intervenir la probabilité
- A et B **indépendants** : $\mathrm{P}(A \cap B) = \mathrm{P}(A) \times \mathrm{P}(B)$

2 évènements de probabilité non nulle incompatibles sont-ils indépendants ?

A et B **incompatibles** : $A \cap B = \varnothing$, $\mathrm{P}(A \cap B) = 0$
$\mathrm{P}(A) \neq 0$ et $\mathrm{P}(B) \neq 0$, donc $\mathrm{P}(A) \times \mathrm{P}(B) \neq 0$
Donc $\mathrm{P}(A \cap B) \neq \mathrm{P}(A) \times \mathrm{P}(B)$

A et B ne sont **pas indépendants**

Indépendance de n évènements (1)

Indépendance 2 à 2

$(A_1; A_2; \ldots; A_n)$ sont **indépendants 2 à 2** ssi

$$\forall i \in \{1; 2; \ldots; n\} \text{ et } \forall j \in \{1; 2; \ldots; n\}, \text{ pour } i \neq j$$

$$\mathrm{P}(A_i \cap A_j) = \mathrm{P}(A_i) \times \mathrm{P}(A_j)$$

Exemple : cas de 3 évènements

A, B et C sont 2 à 2 indépendants ssi

- $\mathrm{P}(A \cap B) = \mathrm{P}(A)\,\mathrm{P}(B)$
- et $\mathrm{P}(A \cap C) = \mathrm{P}(A)\,\mathrm{P}(C)$
- et $\mathrm{P}(B \cap C) = \mathrm{P}(B)\,\mathrm{P}(C)$

Indépendance de n évènements (2)

Indépendance mutuelle

$(A_1; A_2; \ldots; A_n)$ sont **mutuellement indépendants** ssi

$$\forall J \subset \{1; 2; \ldots; n\}, \mathrm{P}\left(\bigcap_{j \in J} A_j\right) = \prod_{j \in J} \mathrm{P}(A_j)$$

Exemple : cas de 3 évènements

Exemple : A, B et C sont mutuellement indépendants ssi

- $\mathrm{P}(A \cap B) = \mathrm{P}(A)\,\mathrm{P}(B)$
- et $\mathrm{P}(A \cap C) = \mathrm{P}(A)\,\mathrm{P}(C)$
- et $\mathrm{P}(B \cap C) = \mathrm{P}(B)\,\mathrm{P}(C)$
- et $\mathrm{P}(A \cap B \cap C) = \mathrm{P}(A)\,\mathrm{P}(B)\,\mathrm{P}(C)$

Épreuves indépendantes (1)

Définition

On parlera d'épreuves **indépendantes** lorsque le résultat d'une des épreuves n'a aucune influence sur les résultats des autres épreuves

Application en statistique

Constitution de n-échantillons (cf cours "Estimation et intervalle de confiance")

Exemple : réalisation de 5 lancés d'une pièce équilibrée

F_i : « Obtenir face au i-ème lancé »
Probabilité p d'obtenir 5 fois face : $\mathrm{P}(F_1 \cap F_2 \cap F_3 \cap F_4 \cap F_5)$
Les 5 lancés sont indépendants :

$$p = \mathrm{P}(F_1)\,\mathrm{P}(F_2)\,\mathrm{P}(F_3)\,\mathrm{P}(F_4)\,\mathrm{P}(F_5)$$

$$p = \left(\frac{1}{2}\right)^5$$

croisé

Exemple de QCM (CC 2023/2024)

Énoncé

Soit M l'évènement « être malade » et G l'évènement « avoir le génotype CC au niveau d'un SNP ». Parmi les propositions ci-dessous relatives aux probabilités, cochez celle(s) qui est/sont vraie(s)

A. $P(M|G) = \frac{P(M \cap G)}{P(M)}$

B. $P(M \cap G) = P(M) + P(G) - P(M \cup G)$

C. si M et G sont indépendants, alors $P(M|G) = P(M)$

D. l'évènement (M|G) est un évènement conditionnel

E. si M et G sont incompatibles alors $P(M \cap G) = 0$

Exemple de QCM (CC 2023/2024)

Énoncé

Soit M l'évènement « être malade » et G l'évènement « avoir le génotype CC au niveau d'un SNP ». Parmi les propositions ci-dessous relatives aux probabilités, cochez celle(s) qui est/sont vraie(s)

A. $P(M|G) = \frac{P(M \cap G)}{P(M)}$

B. $P(M \cap G) = P(M) + P(G) - P(M \cup G)$

C. si M et G sont indépendants, alors $P(M|G) = P(M)$

D. l'évènement (M|G) est un évènement conditionnel

E. si M et G sont incompatibles alors $P(M \cap G) = 0$

Réponse

B-C-E

Plan du cours

Probabilités

Probabilité conditionnelle

Indépendance

Variables aléatoires
- Loi de probabilité - fonction de répartition
- Espérance et variance
- Variables aléatoires indépendantes

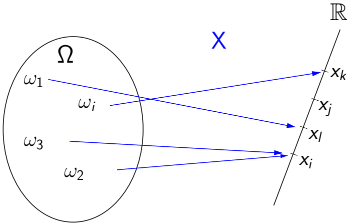
Lois classiques

Variable aléatoire : introduction

Introduction

Soit Ω l'ensemble fondamental des résultats d'une expérience aléatoire. L'attribution d'un nombre à chaque résultat de l'expérience permet de définir une **variable aléatoire**.

Illustration



- À chaque événement élémentaire ω correspond un nombre réel x.
- $x =$ réalisation de la variable X pour l'événement ω
- Attention, il n'y a pas forcément autant de valeurs possibles x que d'événements élémentaires (ex. 3)

Remarque

Une va est une variable **quantitative**

Variable aléatoire : exemples

Exemple 1 : lancé d'un dé à 6 faces

- Expérience aléatoire : lancé d'un dé à 6 faces
- Univers des événements élémentaires possibles : $\{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$
- Valeurs possibles pour la va : $\{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$

Exemple 2 : facteur Rhésus

- Expérience aléatoire : détermination du facteur rhésus
- Univers des possibles : {positif ; négatif}
- Valeurs possibles pour la va : $\{0; 1\}$ (codage arbitraire)

Exemple 3 : nombre de filles dans une fratrie de 2

- Expérience aléatoire : constitution d'une fratrie de 2 enfants
- Univers des possibles : $\Omega = \{GG; GF; FG; FF\}$
- Variable aléatoire X : "Nombre de filles"
- Valeurs possibles pour la va X : $X(\Omega) = \{0; 1; 2\}$

Variable aléatoire : définition

Définition (à titre informatif)

On appelle variable aléatoire sur Ω tout application X : $\Omega \to \mathbb{R}$ telle que $\forall (a, b) \in \mathbb{R} \quad X^{-1}([a,b])$ est un évènement

Notations

Les **va** sont notées avec des **lettres majuscules** : X, Y, Z, ...
Les **valeurs possibles** ou **réalisations** d'une va sont notées avec des **lettres minuscules** : x_i, a, z, ...
Evènements : $(X = k)$, $(0 \leq Z \leq 1)$, ...

Propriétés

Si X et Y sont des va définies sur Ω alors :

- $X + Y$ est une va
- $X \times Y$ est une va
- $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, λX est une va

Deux types de variables aléatoires

Variable aléatoire discrète

Elle prend un nombre **fini** ou **infini dénombrable** de valeurs possibles

Exemples :

- Résultat d'un lancé de dé
- Nombre d'opérations réalisées dans un service de chirurgie

Variable aléatoire continue

Elle prend un nombre **infini indénombrable** de valeurs possibles

Exemples :

- Taux de glucose sanguin
- Poids des nouveaux nés

Loi de probabilité (1) : cas des va discrètes

Définition

Soit X une va discrète. Sa loi de probabilité est déterminée par

- l'ensemble des **valeurs possibles** x_i ($i \in I$, fini ou infini dénombrable)
- les **probabilités** $p_i = \mathrm{P}(X = x_i)$

Propriétés

- $\forall i \in I, \mathrm{P}(X = x_i) \geq 0$
- $\displaystyle\sum_{i \in I} \mathrm{P}(X = x_i) = \sum_{i \in I} p_i = 1$

Représentation classique

valeur possible	x_1	...	x_i	...	x_n
probabilité	p_1	...	p_i	...	p_n

Exemple de loi de probabilité discrète

Exemple de la fratrie de 2 enfants

- Hypothèse : Probabilité d'avoir un garçon $= 0{,}5$

Distribution de probabilité ou loi de probabilité du nombre de filles dans la fratrie :

événements possibles	GG	GF ou FG	FF
valeurs possibles	0	1	2
probabilités	1/4	1/2	1/4

- $\mathrm{P}(X = 0) = \mathrm{P}(G \cap G) = \mathrm{P}(G) \times \mathrm{P}(G)$ (indépendance)
- $\mathrm{P}(X = 2) = \mathrm{P}(F \cap F) = \mathrm{P}(F) \times \mathrm{P}(F)$ (indépendance)
- $\mathrm{P}(X = 1) = \mathrm{P}((G \cap F) \cup (F \cap G)) = \mathrm{P}(G \cap F) + \mathrm{P}(F \cap G)$ (incompatibilité)
  $\mathrm{P}(X = 1) = 1/4 + 1/4 = 1/2$

Fonction de répartition : cas discret (1)

Définition

On appelle **fonction de répartition** (fdr) de X toute fonction F telle que $\forall t \in \mathbb{R}, F(t) = \mathrm{P}(X \leq t)$

Interprétation

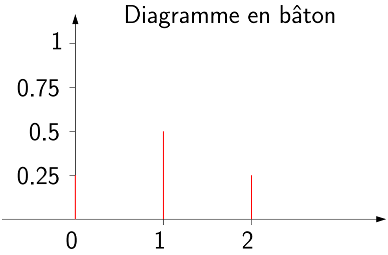
La fonction de répartition correspond à la distribution des probabilités cumulées

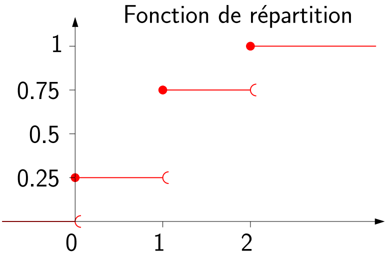
Fonction de répartition : cas discret (2)

Exemple de la fratrie de 2 enfants

Valeurs possibles	Probabilités
0	0,25
1	0,5
2	0,25

$$\begin{array}{rl} t < 0 & \mathrm{P}(X \leq t) = 0 \\ t = 0 & \mathrm{P}(X \leq t) = 0{,}25 \\ 0 < t < 1 & \mathrm{P}(X \leq t) = 0{,}25 \\ t = 1 & \mathrm{P}(X \leq t) = 0{,}75 \\ 1 < t < 2 & \mathrm{P}(X \leq t) = 0{,}75 \\ t = 2 & \mathrm{P}(X \leq t) = 1 \\ t > 2 & \mathrm{P}(X \leq t) = 1 \end{array}$$





Fonction de répartition : cas discret (3)

Propriétés

- $\forall t \in \mathbb{R}, 0 \leq F(t) \leq 1$
- F est **croissante**
- $\lim_{x \to -\infty} F(x) = 0$
- $\lim_{x \to +\infty} F(x) = 1$

Dans le cas discret, F est une fonction « en marches d'escalier »

Calcul de probabilités

- $$\mathrm{P}(X = x_i) = \mathrm{P}(X \leq x_i) - \mathrm{P}(X \leq x_{i-1})$$
$$\mathrm{P}(X = x_i) = F(x_i) - F(x_{i-1})$$

Loi de probabilité : cas des va continues

Problème

L'ensemble des valeurs possibles de X est **infini indénombrable**

- on ne peut définir la loi de probabilité par l'ensemble des $(x_i,\ p_i)$
- En général, $\forall i, \mathrm{P}(X = x_i) = p_i = 0$

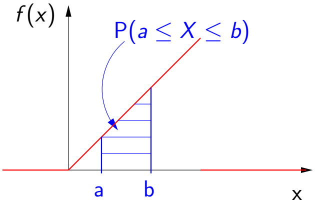
Densité de probabilité

On appelle **densité de probabilité** (ddp) toute fonction f telle que :

- $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) \geq 0$
- $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$ (aire sous la courbe égale à 1)

Probabilité d'un intervalle

$$\boxed{\mathrm{P}(a \leq X \leq b) = \int_a^b f(x)dx}$$



Fonction de répartition : cas continu

Même définition que dans le cas discret

On appelle **fonction de répartition** (fdr) de X toute fonction F telle que $\forall x \in \mathbb{R}, F(x) = \mathrm{P}(X \leq x)$

Mêmes propriétés que dans le cas discret (cf exercices)

- F est **croissante**
- $\lim_{x \to -\infty} F(x) = 0$
- $\lim_{x \to +\infty} F(x) = 1$

Cas continu : la fdr est **continue** et non plus en marches d'escalier

Lien avec la densité de probabilité - calcul de probabilités

Soit une va X dont la ddp est f. $F : x \to F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt$

$$\boxed{\mathrm{P}(a \leq X \leq b) = \int_a^b f(t)dt = F(b) - F(a)}$$

Espérance d'une va

Introduction

Espérance = moyenne théorique
Elle renseigne sur la **position** des valeurs possibles sur une échelle

Définition dans le cas d'une va discrète X

L'espérance de X se note $\mathrm{E}(X)$ ou μ_x et est définie par :

$$\boxed{\mathrm{E}(X) = \sum_i x_i \times P(X = x_i) = \sum_i x_i \times p_i}$$

Si $X(\Omega)$ est fini alors $i \in [0; n]$
Si $X(\Omega)$ est infini dénombrable alors $i \in [0; +\infty[$

Définition dans le cas d'une va continue

Soit X une va continue et soit f sa ddp. L'espérance de X est définie par

$$\boxed{\mathrm{E}(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx}$$

Propriété de l'espérance

Linéarité

Soient X *et* Y deux va et a *et* b des nombres réels :

$$E(aX + b) = aE(X) + b$$

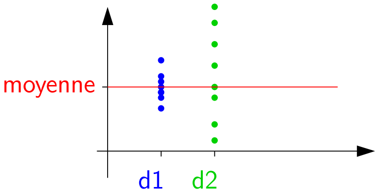
$$E(X + Y) = E(X) + E(Y)$$

Variable centrée

- Si $E(X) = 0$ alors X est une va **centrée**
- la va $Y = X - E(X)$ est la va centrée associée à X

Variance d'une va

Rappel : variance d'une distribution



La variance d'une distribution mesure sa **dispersion** autour de sa moyenne

Définition générale (cas discret ou continu)

Soit X une va. La variance de X se note $\mathrm{var}(X)$ ou σ_X^2 et est définie par :

$$\mathrm{var}(X) = \mathrm{E}\left((X - \mathrm{E}(X))^2\right)$$

Autre formule équivalente, plus pratique pour les calculs

$$\boxed{\mathrm{var}(X) = \mathrm{E}\left(X^2\right) - \mathrm{E}(X)^2}$$

Variance d'une va (2)

Cas discret

Soit X une va :

$$\text{var}(X) = \sum_i (x_i - \text{E}(X))^2 \times \text{P}(X = x_i)$$

Ou alors :

$\text{var}(X) = \text{E}\left(X^2\right) - \text{E}(X)^2 \quad \text{avec } \text{E}\left(X^2\right) = \sum_i x_i^2 \times \text{P}(X = x_i)$

Cas continu

Soit f une ddp de la va X :

$$\text{var}(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - \text{E}(X))^2 \times f(x)dx$$

Ou alors :

$\text{var}(X) = \text{E}\left(X^2\right) - \text{E}(X)^2 \quad \text{avec } \text{E}\left(X^2\right) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 \times f(x)dx$

Propriétés d'une variance

Positivité

Une variance est toujours positive (ou nulle)

La variance n'est pas linéaire !

Soient X *et* Y deux va et a et b des nombres réels :

$$\text{var}(aX) = a^2\text{var}(X)$$

$$\text{var}(X + b) = \text{var}(X)$$

$$\text{var}(aX + b) = a^2\text{var}(X)$$

$$\text{var}(X + Y) = \text{var}(X) + \text{var}(Y) + 2\text{cov}(X, Y)$$

Variable réduite

- Si $\text{var}(X) = 1$ alors X est une va **réduite**

Écart-type d'une va

Définition

Soit X une va. L'écart-type de X se note σ_X et se définit par :

$$\boxed{\sigma_X = \sqrt{\text{var}(X)}}$$

Intérêt : mesure de dispersion dans la même unité de mesure que X

Variable centrée réduite

Soit X une va d'espérance $\text{E}(X)$ et d'écart-type σ_x

$$\boxed{Z = \frac{X - E(X)}{\sigma_x}}$$

Z est la va **centrée réduite** associée à X

- $\text{E}(Z) = \text{E}\left(\frac{X-E(X)}{\sigma_x}\right) = \frac{1}{\sigma_X} \times (\text{E}(X) - \text{E}(X)) = 0$
- $\text{var}(Z) = \sigma_Z^2 = \frac{1}{\sigma_X^2} \times \text{var}(X - \text{E}(X)) = 1$

Variables aléatoires indépendantes

Rappel : évènements indépendants

Deux évènements A et B sont indépendants ssi $\mathrm{P}(A \cap B) = \mathrm{P}(A)\,\mathrm{P}(B)$

Définition dans le cas discret

Soient X et Y deux va **indépendantes** à valeurs respectivement dans $E = \{x_1; x_2; \ldots\}$ et $F = \{y_1; y_2; \ldots\}$

$$\mathrm{P}(X = x_i, Y = y_j) = \mathrm{P}(X = x_i) \times \mathrm{P}(Y = y_j) \quad \forall (x_i, y_j) \in E \times F$$

Propriétés

Si X et Y sont **indépendantes**, alors

- $\mathrm{cov}(X, Y) = 0$ (Attention, réciproque fausse !)
- $\mathrm{var}(X + Y) = \mathrm{var}(X) + \mathrm{var}(Y)$

Si X_1, X_2, ..., X_n sont indépendantes, alors

$$\boxed{\mathrm{var}(X_1 + X_2 + \ldots + X_n) = \mathrm{var}(X_1) + \mathrm{var}(X_2) + \ldots + \mathrm{var}(X_n)}$$

Plan du cours

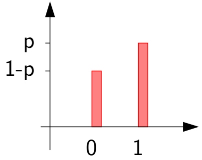
Loi de Bernoulli

Loi de probabilité

Loi d'une va qui ne prend que 2 valeurs : 0 et 1

x_i	0	1
p_i	q	p

$X \rightarrow Bern(p)$



Espérance et variance

$\mathrm{E}(X) = 0 \times q + 1 \times p = p$
$\mathrm{E}\left(X^2\right) = 0^2 \times q + 1^2 \times p = p$
$\mathrm{var}(X) = p - p^2 = p(1-p) = pq$

$$\boxed{\begin{array}{c} \mathrm{E}(X) = p \\ \mathrm{var}(X) = pq \end{array}}$$

Utilisation

Modéliser les résultats d'expériences aléatoires ayant **2 issues possibles** (épreuves de Bernoulli)
Exemple : statut maladie d'un individu

Schéma de Bernoulli

Principe

Répéter une épreuve de Bernoulli

- n fois
- de façon **indépendantes**

Exemple

Observer la présence (ou l'absence) d'effets indésirables sur un échantillon de 10 patients

Modélisation

Ensemble de n va **indépendantes** qui suivent toutes la **même loi** de Bernoulli de paramètre p

Loi Binomiale (1) : introduction

Le problème

Dans la population, 85% des individus sont de rhésus positif. On considère un groupe de 5 patients : quelle est la probabilité que 2 d'entre eux soient de rhésus positif ?

Modélisation du problème

Pour un patient : soit X la va représentant son groupe rhésus.
On pose :

$$\begin{cases} X = 1 \text{ si l'individu est de Rh+} \\ X = 0 \text{ si l'individu est de Rh-} \end{cases}$$

$X \to Bern(p)$ avec $p = \mathrm{P}(Rh+) = 0{,}85$

Pour les 5 patients : soit S_n la va représentant le nombre de patients Rh+
On **répète** 5 fois l'épreuve de Bernoulli de façon **indépendante**.

$$S_n = X_1 + X_2 + X_3 + X_4 + X_5 \quad Sn \to \text{Binomiale}$$

Loi Binomiale (2) : loi de probabilité

Loi Binomiale et ses deux paramètres n et p

Loi $\mathcal{B}(n, p)$ modélise la répétition de n épreuves de Bernoulli indépendantes, de même probabilité p

$\mathrm{P}(S_n = k)$: probabilité de k succès parmi les n répétitions

$$\boxed{\mathrm{P}(S_n = k) = \mathrm{C}_n^k \, (p)^{\,k} \, (1 - p)^{\,n-k}} \quad \text{pour } k \in \{0, 1, 2, \ldots, n\}$$

Rappels

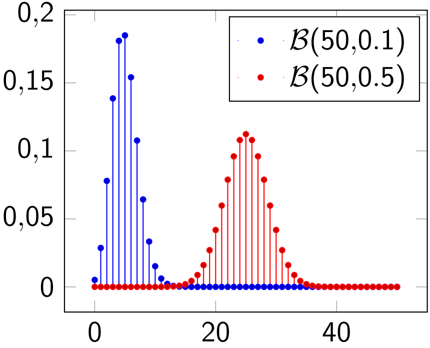
$\mathrm{C}_n^k = \binom{n}{k} = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}$ Nb combinaisons de k éléments parmi n

$0\,! = 1$

$n! = 1 \times 2 \times \ldots \times n$

Loi binomiale (3) : représentation graphique

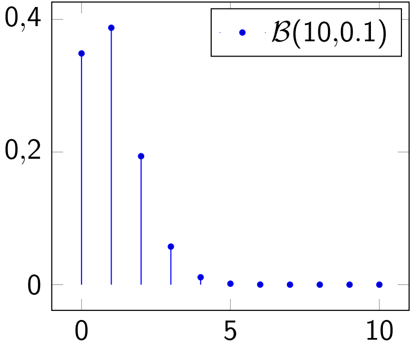
Loi de probabilité



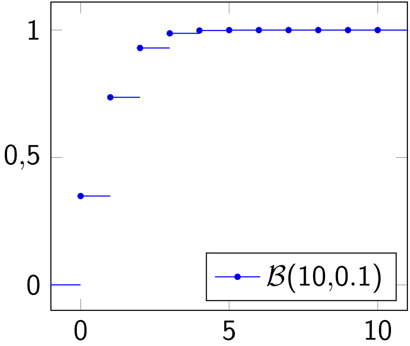
Loi binomiale (4)

Loi de probabilité et fonction de répartition

Loi de probabilité



Fonction de répartition



Loi binomiale (4) : espérance, variance et écart-type

Soit $S_n \to \mathcal{B}(n,p)$

Formules

$$\boxed{\begin{array}{c} \mathrm{E}(S_n) = np \\ \mathrm{var}(S_n) = npq \\ \sigma_{S_n} = \sqrt{npq} \end{array}}$$

Comment retrouver les formules ?

$$\begin{aligned} \mathrm{E}(S_n) &= \mathrm{E}(X_1 + X_2 + \ldots + X_n) \\ &= \mathrm{E}(X_1) + \mathrm{E}(X_2) + \ldots + \mathrm{E}(X_n) \\ &= p + p + \ldots + p = np \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathrm{var}(S_n) &= \mathrm{var}(X_1 + X_2 + \ldots + X_n) \\ &= \mathrm{var}(X_1) + \mathrm{var}(X_2) + \ldots + \mathrm{var}(X_n) \quad \text{indépendance} \\ &= npq \end{aligned}$$

Loi normale ou loi de (Laplace-)Gauss

Introduction

Loi la plus importante en statistiques

- Elle modélise de nombreux phénomènes
- Elle permet d'approximer plusieurs autres lois, en particulier quand on considère des grands échantillons
- Condition de nombreux tests statistiques

Paramètres

2 paramètres :

- μ, son **espérance**
- σ, son **écart-type** (ou σ^2, sa variance)

Notation : $X \to \mathcal{N}(\mu; \sigma)$ mais aussi $X \sim \mathcal{N}(\mu; \sigma)$

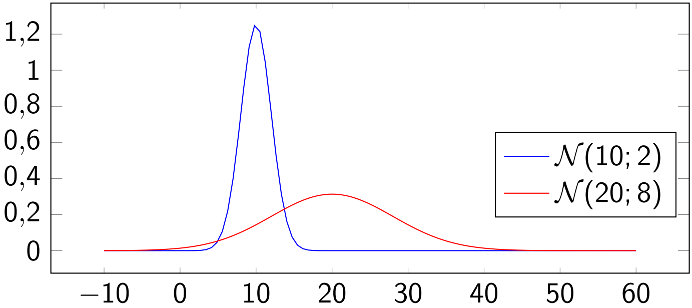
Loi normale (2) : densité de probabilité

Expression analytique

Soit une va X suit une loi normale d'espérance μ et d'écart-type σ.
Sa densité de probabilité est définie par :

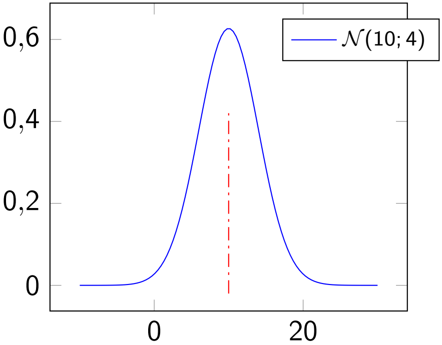
$$f(x) = \frac{1}{\sigma \times \sqrt{2\pi}} \times exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2\right) \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Représentation graphique



Propriétés

Représentation graphique



- *Symétrie* par rapport à l'axe vertical passant par μ
- 2 *points d'inflexion* d'abscisses $\mu - \sigma$ et $\mu + \sigma$
- Mode $= \mu =$ médiane
- ddp : aire sous la courbe $= 1$

Combinaison linéaire de va Gaussiennes indépendantes

Soient $X_1 \to \mathcal{N}(\mu_1;\sigma_1)$ et $X_2 \to \mathcal{N}(\mu_2;\sigma_2)$ deux va Gaussiennes indépendantes

$$\boxed{Y = aX_1 + bX_2 \to \mathcal{N}\left(a\mu_1 + b\mu_2; \sqrt{a^2\sigma_1^2 + b^2\sigma_2^2}\right)}$$

Fonction de répartition

Expression analytique

Soit une va X suit une loi normale d'espérance μ et d'écart-type σ.
Sa fonction de répartition est donnée par :

$$F(x) = \mathrm{P}(X \leq x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{t-\mu}{\sigma}\right)^2\right) dt$$

Calcul de probabilités

$$\mathrm{P}(a \leq X \leq b) = F(b) - F(a)$$

L'intégrale ne peut se résoudre de façon algébrique $\rightarrow$ utilisation de tables

La loi normale centrée-réduite (ou loi normale standard)

Définition

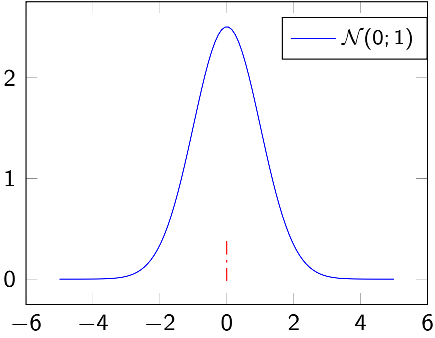
Loi normale d'espérance $\mu = \mathbf{0}$ et d'écart-type $\sigma = \mathbf{1}$
Passage de $X \to \mathcal{N}(\mu; \sigma)$ à $Z \to \mathcal{N}(0; 1)$:

- On retranche μ (*centrer*)
- On divise par σ (*réduire*)

$$\boxed{Z = \frac{X - \mu}{\sigma}}$$

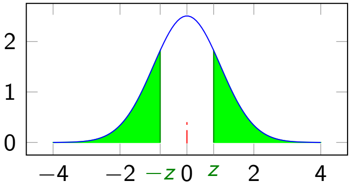
Densité de probabilité

$$f(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \times exp\left(\frac{-1}{2} z^2\right)$$



Propriété de loi normale centrée-réduite

Représentation graphique



- *Symétrie* par rapport à l'axe des ordonnées
- 2 *points d'inflexion* d'abscisses -1 et $+1$
- Mode $= 0 =$ médiane
- ddp : aire sous la courbe $= 1$

Calcul de probabilités

On note Φ la fdr de la loi normale centrée réduite

$\mathrm{P}(Z \leq z) = \Phi(z)$

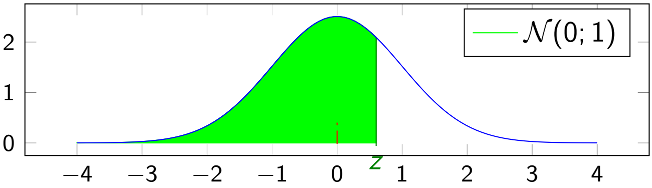
$\mathrm{P}(Z \geq z) = 1 - \mathrm{P}(Z \leq z) = 1 - \Phi(z)$

$\mathrm{P}(Z \geq z) = \mathrm{P}(Z \leq -z) = \Phi(-z)$ (symétrie de la ddp/axe ordonnées)

$$\boxed{\Phi(-z) = 1 - \Phi(z)}$$

$$\boxed{\mathrm{P}(a \leq Z \leq b) = \mathrm{P}(a < Z < b) = \Phi(b) - \Phi(a)}$$

La table de la fonction de répartition (table 1)



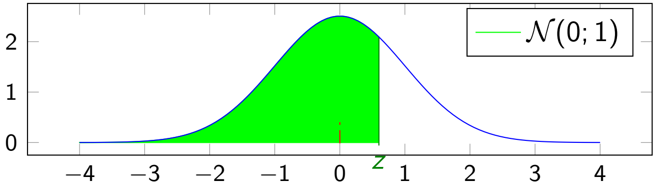
Pour une valeur de z donné, la table donne $\mathrm{P}(Z \leq z)$

Exemple

Lire dans la table

- $\mathrm{P}(Z \leq 1{,}42)$
- $\mathrm{P}(Z \leq -0{,}21)$
- $\mathrm{P}(Z \geq 0{,}41)$

La table de la fonction de répartition (table 1)



Pour une valeur de z donné, la table donne $\mathrm{P}(Z \leq z)$

Exemple

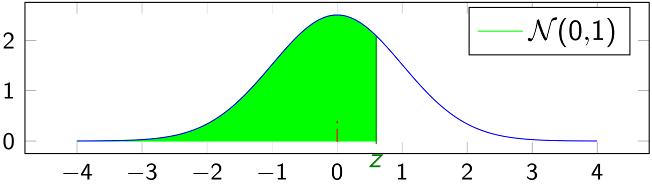
Lire dans la table

- $\mathrm{P}(Z \leq 1{,}42)$
- $\mathrm{P}(Z \leq -0{,}21)$
- $\mathrm{P}(Z \geq 0{,}41)$

- $\mathrm{P}(Z \leq 1{,}42) = \Phi(1{,}42) = 0{,}9222$
- $\mathrm{P}(Z \leq -0{,}21) = \Phi(-0{,}21) = 1 - \Phi(0{,}21)$
  $\mathrm{P}(Z \leq -0{,}21) = 1 - 0{,}5832 = 0{,}4168$
- $\mathrm{P}(Z \geq 0{,}41) = 1 - \mathrm{P}(Z \leq 0{,}41) = 1 - \Phi(0{,}41)$
  $\mathrm{P}(Z \geq 0{,}41) = 1 - 0{,}6591 = 0{,}3409$

Table de la fdr pour p donné (table 2)

Attention, changement de table par rapport à 2023/2024



Pour une probabilité p donnée, la table donne z tel que $P(Z \leq z) = p$

Exemple

Lire dans la table la valeur de z telle que :

- $P(Z \geq z)$=0,025
- $P(Z \geq z)$=0,75

- $P(Z \leq z)$=1-0,025=0,975 $\rightarrow z = 1{,}96$
- $P(Z \geq z)$=0,75 $\rightarrow$ $P(Z \leq -z) = 0{,}75$
  (Symétrie de la courbe)
  on lit -z=0,6745, donc z=-0,6745

Le théorème central limite (TCL)

Énoncé simplifié

Soient X_1,$X_2,\ldots$,X_n des variables **mutuellement indépendantes** de **même loi** de probabilité $\mathcal{L}(\mu,\sigma)$, alors lorsque n **est suffisamment grand** la variable aléatoire $S_n = X_1 + X_2 + \ldots + X_n$ suit approximativement une **loi normale** d'espérance $n \times \mu$, et d'écart-type $\sqrt{n} \times \sigma$

Conséquence pour la variable M (moyenne d'échantillon)

$$M = \frac{X_1 + X_2 + \ldots + X_n}{n}$$

Lorsque n est suffisamment grand, alors M suit approximativement une **loi normale** d'espérance $\mu_M = \mu$ et d'écart-type $\sigma_m = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$

Remarques

- Dans ce cours, on considèrera n suffisamment grand quand $\mathbf{n \geq 30}$
- Le TCL explique l'importance de la loi normale dans la nature

Approximation de la loi binomiale par la loi normale

Approximation

Soit $S_n \to \mathcal{B}(n,p)$ et soit $X \to Bern(p)$.

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i, \text{ les } X_i \text{ étant indépendantes et de même loi que } X$$

D'après le TCL, on peut **approcher** la loi de S_n par une loi normale $\mathcal{N}(np; \sqrt{npq})$.

En pratique

Si $n \geq 30$, $np \geq 5$ et $n(1-p) \geq 5$, on approchera $\mathcal{B}(n,p)$ par $\mathcal{N}(np; \sqrt{npq})$