



Tutorat Lyon Est

Année Universitaire 2020 - 2021

Unité d'Enseignement 4

Correction Annale 2015-2016

14 questions

60 minutes

Julie DIAS
Marion MORIZE
Noé MOREAU

Correction rapide

Questions	Item(s) juste(s)
1	ADE
2	ACD
3	BDE
4	C
5	ABCE
6	BD
7	ABE
8	B
9	ACDE
10	C
11	BDE
12	BCDE
13	ABCD
14	BDE

Attention !

Ces corrections vous sont proposées par les tuteurs et responsables d'UE 4. Ce ne sont pas des corrections officielles. Elles n'ont aucune valeur aux yeux de la loi et ne peuvent pas être utilisées pour contester les résultats des concours de PACES

Question 1 : ADE

Dans les questions sur les équations différentielles, il faut toujours bien vérifier quelle est la fonction et quelle est la variable dont on parle !

A VRAI La fonction est y et la variable est t .

$$3 \frac{d^2 y}{dt^2} + 2t \frac{dy}{dt} = 4ty$$

L'équation différentielle est **linéaire** (que des termes du type y, y', y'', \dots), du **2nd ordre**, à **coefficients non constants** ($2t$ et $4t$ dépendent de t), et **sans second membre**.

B FAUX La fonction est y et la variable est x .

$$2x^2 y + 4y^2 + 3xy^{(3)} = \sin x$$

L'équation différentielle est **non linéaire** (terme y^2), du **troisième ordre**, à **coefficients non constants** ($4x^2$ et $3x$ dépendent de x), et **avec second membre**.

C FAUX Ici, il y a 2 fonctions, x et y , et une variable, t .

$$\begin{aligned} \frac{d^1 x}{dt} &= -4xy - 2x + 5 \\ \frac{d^1 y}{dt} &= 4xy - 3y \end{aligned}$$

Ce système est **non linéaire** (terme xy), du **premier ordre**, à **coefficients constants**, et **avec second membre**.

D VRAI $2y' + 5y = 0 \Leftrightarrow y' = -2,5y$

La solution de l'ED est : $y(t) = -2e^{-2,5t}$

Cette solution est de la forme : $y(t) = y_0 e^{kt}$ avec y_0 et k négatifs, donc la fonction solution est croissante.

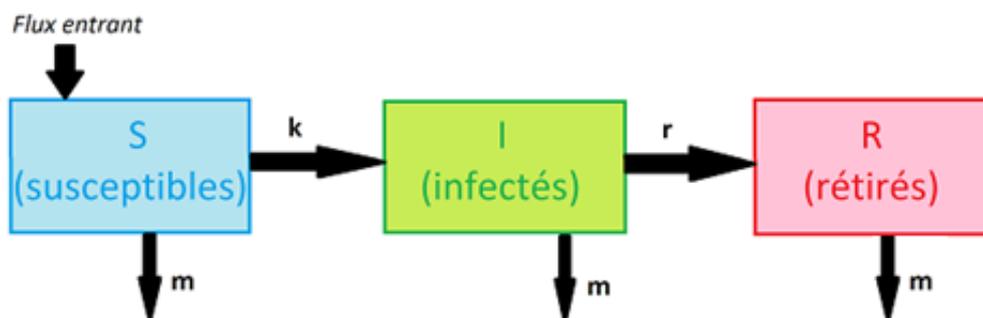
E VRAI La solution d'une ED de la forme $y' = g(x) * y$ a pour solution $y(x) = y_0 e^{G(x)}$

Il faut donc calculer la primitive de $(3 + 2x)$, qui est $(3x + x^2)$.

Donc $y(x) = y_0 e^{(3x+x^2)}$.

Question 2 : ACD

Dans cette question, on s'intéresse à la transmission d'une maladie contagieuse M . Nous pouvons représenter le problème par un schéma comme si dessous.



On peut donc définir le système d'équations différentielles suivant :

$$\begin{cases} \frac{dS}{dt} = -k.S.I + \text{flux entrant} - m.I & (\text{avec } S(0) = S_0) \\ \frac{dI}{dt} = +k.S.I - r.I - m.I & (\text{avec } I(0) = I_0) \\ \frac{dR}{dt} = +r.I - m.R & (\text{avec } R(0) = 0) \end{cases}$$

A VRAI Si le flux entrant est une constante :

- ▶ le système est non linéaire car il contient les termes $S.I$ qui sont non linéaires (car c'est le produit de deux fonctions),
- ▶ de 1^{er} ordre car la plus haute dérivée est d'ordre 1 ($dS(t)/dt$ ou dI/dt ou dR/dt),
- ▶ à coefficients constants car les taux k , m et r sont des constantes et ne dépendent pas de t ,
- ▶ et avec 2nd membre car le flux entrant est une constante.

B FAUX Si maintenant le flux entrant est proportionnel au nombre de susceptibles, le terme flux entrant peut être défini par $N.S$ (avec N une constante). Le système d'ED ne contient donc plus de 2nd membre car le terme « flux entrant » comporte désormais une fonction ($S(t)$).

C VRAI $\frac{dI}{dt} = +k.S.I - r.I - m.I = +k.S.I - (r + m)I$ [factorisation]

D VRAI Si l'on met en place une campagne de vaccination avec un taux de vaccination constant v , notre système d'équations différentielles devient :

$$\begin{cases} \frac{dS}{dt} = -k.S.I + \text{flux entrant} - m.S - v.S & (\text{avec } S(0) = S_0) \\ \frac{dI}{dt} = +k.S.I - r.I - m.I & (\text{avec } I(0) = I_0) \\ \frac{dR}{dt} = +r.I - m.R + v.S & (\text{avec } R(0) = 0) \end{cases}$$

E FAUX La vaccination va permettre de diminuer le nombre de susceptibles en les immunisant (\Rightarrow retirés) contre la maladie contagieuse M .

Question 3 : BDE

A FAUX Si l'écart-type était de 4, l'intervalle $[0 ; 8]$ contiendrait 68% des valeurs, et l'intervalle $[-2 ; 10]$ en contiendrait 95%. Ici, on voit clairement que ces intervalles en contiennent beaucoup plus.

B VRAI À ne pas confondre avec sa densité de probabilité.

C FAUX Le graphe 4 représente la densité de probabilité d'une loi normale centrée réduite.

D VRAI La distribution est plus étalée dans le graphe 3, donc les variables sont plus dispersées, donc l'écart-type est plus grand. Faites tout de même attention à vérifier que l'échelle indiquée sur l'axe des abscisses est la même sur les deux graphiques pour pouvoir les comparer !

E VRAI Dans la distribution de la loi normale, médiane = moyenne = espérance. Dans la fonction de répartition, elle se situe au point où la pente de la courbe est la plus importante, ici, à environ 4.

Question 4 : C

$P(P)$ = probabilité d'avoir le père fumeur

$P(M)$ = probabilité d'avoir la mère fumeuse

$P(A)$ = probabilité d'avoir un enfant asthmattique

A FAUX On cherche la probabilité d'avoir deux parents fumeurs. Or dans le groupe étudié on sait qu'il y a 50% de risque que le père soit fumeur.

Donc $P(P \cap M) = P(M|P) \times P(P) = 0,6 \times 0,5 = 0,3$

Donc 0,3 et non 0,03.

B FAUX On veut tester l'indépendance de P et de M

On sait que $P(M|P) = 0,6$ et $P(M) = P(M|P) \times P(P) + P(M|\bar{P}) \times P(\bar{P}) = 0,3 + 0,2 \times 0,5 = 0,4$

Donc 0,6 étant différent de 0,4 les deux évènements ne sont pas indépendant !

C VRAI On cherche $P(M|A)$ or :

$$\begin{aligned} P(M|A) &= \frac{P(M \cap A)}{P(A)} = \frac{P(A|M) \times P(M)}{P(P \cap M) \times P(A|(P \cap M)) + P(P) \times P(A|P) + P(M) \times P(A|M)} \\ &= \frac{0,13 \times 0,4}{0,3 \times 0,15 + (0,5 - 0,3) \times 0,05 + (0,4 - 0,3) \times 0,13} = \frac{0,052}{0,068} \end{aligned}$$

$P(A|M) = 0,13$

Attention ici on minore car je ne prends pas en compte le cas où père et mère sont fumeurs. C'est simplement pour simplifier les calculs et répondre à l'item.

D VRAI C'est bien supérieur à 2/3.

D FAUX et **E FAUX** Non car on vient de montrer que $P(M|A) \geq \frac{0,052}{0,068}$ or $P(M) = 0,4$.

Question 5 : ABCE

A VRAI Pour trouver la part de la variance de la glycémie moyenne sur 3 mois (AG) expliquée par A1C, on calcule le coefficient de détermination qui est égal au carré du coefficient de corrélation donc : **coefficient de détermination** $= \rho^2 = 0,92^2 = 0,8464 \approx 0,85 \approx 85\%$.

B VRAI On sait que tester le coefficient de régression revient à tester le coefficient de corrélation. Or d'après l'énoncé on sait que le coefficient de corrélation $r=0,92$ est significativement différent de 0 au niveau de significativité $p < 0,0001$, donc $p < \alpha (=5\%)$. On peut donc conclure que le coefficient de régression est aussi significativement différent de 0 au risque $\alpha=5\%$.

C VRAI L'équation $AG=0,287 \times A1C + 0,467$ en g/L est de la forme $Y = b_1 \times X + b_0$ avec $b_1=0,287$ g/L, X correspondant à A1C et Y correspondant à AG. On sait que b_1 correspond à la variation moyenne de Y par unité d'augmentation de X. Donc on peut en conclure que lorsque A1C augmente d'une unité, AG augmente de 0,287 g/L.

D FAUX Le test du coefficient de corrélation linéaire utilise **une loi de Student à n-2 degrés de liberté**, soit $402-2=400$ ddl.

E VRAI On pose $H : \rho = 0$ avec ρ le coefficient de corrélation de Pearson. L'hypothèse nulle est donc qu'il n'y a pas de corrélation entre AG et A1C. Et H_1 l'hypothèse alternative : $\rho \neq 0$. Pour calculer la statistique de test du coefficient de corrélation, on utilise la formule :

Sous H_0 , $t = \frac{|r|\sqrt{n-2}}{\sqrt{1-r^2}} \rightarrow t_{n-2, \alpha}$

$$\text{Donc } t = \frac{|0,92|\sqrt{402-2}}{\sqrt{1-0,92^2}} = \frac{0,92 \times 20}{\sqrt{1-0,85}} = \frac{0,92 \times 20}{\sqrt{0,15}} = \frac{0,92 \times 4 \times 5}{0,4} = 9,2 \times 5 = 46 \approx 45$$

Question 6 : BD

A FAUX et **B VRAI**

$$ic_{0,95}(\mu_{A1C}) = m_{A1C} \pm z_{\frac{\alpha}{2}} \times \frac{S_{A1C}}{\sqrt{n}} = 6,8 \pm 2 \times \frac{1,2}{20} = [6,68 ; 6,92]$$

L'intervalle est donné avec un chiffre après la virgule, il faut donc minorer la borne inférieure et majorer la borne supérieure. Donc :

$$ic_{0,95}(\mu_{A1C}) = [6,6 ; 7,0]$$

C FAUX On ne peut pas calculer l'intervalle de confiance de μ_{AG} car on n'a pas la valeur de la glycémie dans un échantillon, mais la valeur moyenne théorique.

$$\text{D VRAI } IF_{0,95}(M_{AG}) = \mu_{AG} \pm z_{\frac{\alpha}{2}} \times \frac{\sigma_{AG}}{\sqrt{n}} = 0,1 \pm 2 \times \frac{0,1}{\sqrt{402}} = [0,99 ; 1,01]$$

E FAUX La glycémie suit une loi normale, qui est une loi continue, donc quel que soit k, $P(X=k) = 0$.

Question 7 : ABE

A VRAI Dans l'énoncé, on nous dit que la probabilité de montrer une diminution de 13,5% est de 90%. Il s'agit de la probabilité de rejeter H_0 alors qu'elle est fautive, ce qui correspond à la puissance de l'étude. On nous demande la probabilité d'accepter H_0 alors qu'elle est fautive, ce qui correspond au risque $\beta = 1 - \text{puissance} = 1 - 90\% = 10\%$.

B VRAI cf. "Le critère principal était le délai de survenue du premier événement parmi les suivants : "décès de cause vasculaire", "accident vasculaire cérébral", "infarctus du myocarde"."

C FAUX En ouvert signifie sans insu, or on nous dit dans l'énoncé que "les patients comme les praticiens ignoraient le traitement alloué aux patients". Les autres caractéristiques de l'étude sont justes.

D FAUX L'étude permet d'estimer que les patients sous ticagrelor ont un taux de décès égal à 0.84 multiplié par celui des patients sous clopidogrel.

Leur taux de mortalité est donc réduit de $100\% - 84\% = 16\%$ par rapport à celui des patients sous clopidogrel.

L'hypothèse de 13.5% était celle du calcul d'effectif ; l'étude permet d'estimer l'ampleur d'effet du ticagrelor par rapport au clopidogrel est en fait de 16%, comme $p < 0.001$ cet effet est statistiquement significatif.

Donc on conclut que le Ticagrelor diminue significativement de 16% le taux d'événement.

E VRAI Il s'agit de la définition d'une analyse en intention de traiter.

Question 8 : B

L'estimation de la survie au i ème décès/exclu-vivant par l'estimateur de Kaplan-Meier se calcule par la formule :

$$\hat{S} = \left(1 - \frac{\delta_1}{n_0}\right) * \left(1 - \frac{\delta_2}{n_0 - 1}\right) * \dots * \left(1 - \frac{\delta_i}{n_0 - i + 1}\right)$$

Avec $\delta_3, \delta_4, \delta_8$ et δ_{11} égaux à 0.

$$\begin{aligned}\hat{S} &= \left(1 - \frac{1}{14}\right) * \left(1 - \frac{1}{13}\right) * \left(1 - \frac{0}{12}\right) * \left(1 - \frac{0}{11}\right) * \left(1 - \frac{1}{10}\right) * \left(1 - \frac{1}{9}\right) * \left(1 - \frac{1}{8}\right) * \left(1 - \frac{0}{7}\right) * \left(1 - \frac{1}{6}\right) * \left(1 - \frac{1}{5}\right) * \left(1 - \frac{0}{4}\right) \\ &= \frac{13}{14} * \frac{12}{13} * \frac{9}{10} * \frac{8}{9} * \frac{7}{8} * \frac{5}{6} * \frac{4}{5} = \frac{12 * 7 * 4}{14 * 10 * 6} = \frac{4}{10}\end{aligned}$$

B VRAI

Question 9 : ACDE

On nomme λ_0 et S_0 le taux de mortalité et la probabilité de survie dans le bras traitement de référence. On nomme λ_1 et S_1 le taux de mortalité et la probabilité de survie dans le bras traitement actif. On se situe dans un modèle exponentiel à taux proportionnels, donc :

$$\lambda_1 = \alpha \lambda_0 \text{ avec } \alpha = \frac{1}{2} \text{ et } \lambda_0 = 0,71355 \text{ an}^{-1}$$

$$S_0 = e^{-\lambda_0 t} = (e^{-\lambda_0})^t = (e^{-\lambda_1})^t / \alpha$$

$$S_1 = e^{-\lambda_1 t} = (e^{-\lambda_1})^t = (e^{-\lambda_0})^{\alpha t}$$

A VRAI et B FAUX $(\frac{1}{2} \text{ ans}) = (e^{-\lambda_0})^t = (0,49)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{0,49} = 0,7$

C VRAI $S_1(2 \text{ ans}) = (e^{-\lambda_0})^{\alpha t} = (0,49)^{\frac{1}{2} \times 2} = 0,49$

D VRAI $S_0(5 \text{ ans}) = (e^{-\lambda_0})^t = 0,49^5$

E VRAI $S_1(5 \text{ ans}) = (e^{-\lambda_0})^{\alpha t} = (0,49)^{\frac{1}{2} \times 5} = 0,7^5$

Question 10 : C

Dans cet exercice, nous allons comparer deux proportions : la probabilité de guérison avec le traitement actif et la probabilité de guérison avec un placebo. L'énoncé nous dit aussi que nous allons effectuer un test du Chi-2 et que ce test sera bilatéral, avec un risque $\alpha=5\%$.

Nous posons l'hypothèse nulle H_0 : probabilité de guérison identique entre les bras « traitement actif » et « placebo », donc $H_0 : \pi_{\text{traitement actif}} = \pi_{\text{placebo}}$

et l'hypothèse alternative $H_1 : \pi_{\text{traitement actif}} \neq \pi_{\text{placebo}}$.

Pour illustrer notre énoncé, on peut réaliser un tableau comme ci-dessous :

	Traitement actif	Placebo	
Guérison	95 100	105 100	200
Non guérison	105 100	95 100	200
	200	200	400

Avec en bleu les effectifs observés calculés à partir des données de l'énoncé et en rouge les effectifs attendus sous H_0 .

Pour trouver les effectifs attendus sous H_0 , on effectue un produit en croix :

$$\frac{\text{nb de guérison totale} \times \text{nb de personnes avec ttt actif}}{\text{nb de personne dans l'étude}} = \frac{200 \times 200}{400} = 100$$

Il y a donc 100 guérisons attendues dans le bras traitement actif. On peut donc en déduire qu'il y aura 100 absences de guérison dans le bras traitement actif, 100 guérisons dans le bras placebo (car les probabilités de guérison sont les mêmes dans les deux bras sous H_0) et ainsi, 100 absences de guérison dans le bras placebo.

On vérifie ensuite les conditions d'application du test du Chi-2 : tous les effectifs **attendus** (et non observés) doivent être supérieurs à 5, ce qui est le cas ici. Donc on peut maintenant calculer notre valeur test du Chi-2. **D FAUX** et **E FAUX**.

Sous H_0 , $\sum_{i,j} \frac{(O_{ij} - E_{ij})^2}{E_{ij}} \sim \chi_{1ddl}^2$ avec O_{ij} les effectifs observés et E_{ij} les effectifs attendus.

Nous sommes ici à 1 degré de liberté, car dans un tableau à l lignes et c colonnes, le test est à $(l-1)(c-1)$ ddl, soit ici $(2-1)(2-1)=1$ dl.

Donc sous H_0 ,

$$\begin{aligned} \chi_{1ddl}^2 &= \frac{(95 - 100)^2}{100} + \frac{(105 - 100)^2}{100} + \frac{(95 - 100)^2}{100} + \frac{(105 - 100)^2}{100} \\ &= \frac{25}{100} + \frac{25}{100} + \frac{25}{100} + \frac{25}{100} = 1 \end{aligned}$$

On regarde ensuite dans la table du Chi-2 :

ddl \ p	0,005	0,010	0,025	0,050	0,100	0,250	0,500	0,750	0,900	0,950	0,975	0,990	0,999
1	0,0000	0,0002	0,0010	0,0039	0,0158	0,1015	0,4549	1,3233	2,7055	3,8415	5,0239	6,6349	10,8276

Soit petit $p = P(\chi^2 > 1)$, on lit que $P(\chi^2 < 1)$ se situe entre 50% et 75%, donc $25\% < P(\chi^2 > 1) < 50\%$, donc **B FAUX**.

$p > 5\%$ donc $p > \alpha$, on ne rejette donc pas l'hypothèse nulle. **A FAUX** et **C VRAI**.

Question 11 : BDE

D'après l'énoncé, on note : p la prévalence de la maladie d'Alzheimer = $0,25 = \pi_0$

n le nombre de personnes dans l'échantillon = 100

f la fréquence de la maladie d'Alzheimer dans l'échantillon = $40/100 = 0,40$

A FAUX Il s'agit donc de la comparaison d'une proportion observée à une probabilité théorique. D'après la question « La prévalence dans cette région diffère-t-elle de la prévalence communément admise ? », on en déduit que notre test du Chi-2 sera bilatéral. Le risque alpha est fixé à 5%.

B VRAI On définit l'hypothèse nulle $H_0 : \pi_0 = f$, les deux prévalences ne diffèrent pas.

D'après l'énoncé, les effectifs observés (nb de malades Alzheimer dans l'échantillon et nb de non malades) sont respectivement de 40 et 60.

Les effectifs attendus sous l'hypothèse sont égaux à

- ▶ $n \cdot p = 100 \cdot 0,25 = 25$
- ▶ $n \cdot (1-p) = 100 \cdot 0,75 = 75$.

Ils sont supérieurs à 5 et autorisent donc l'utilisation du test du Chi-2.

C FAUX On applique donc la formule pour calculer la statistique de test :

Sous H_0 , $\chi_{1ddl}^2 = \frac{(O_{ij} - E_{ij})^2}{E_{ij}} \sim \chi_{1ddl}^2$ avec O_{ij} les effectifs observés et E_{ij} les effectifs attendus

Donc sous H_0 , $\chi_{obs}^2 = \frac{(40-25)^2}{25} + \frac{(60-75)^2}{75} = \frac{225}{25} + \frac{225}{75} = 9 + 3 = 12$

D VRAI On regarde maintenant dans notre table du Chi-2 :

ddl \ p	0,005	0,010	0,025	0,050	0,100	0,250	0,500	0,750	0,900	0,950	0,975	0,990	0,999
1	0,0000	0,0002	0,0010	0,0039	0,0158	0,1015	0,4549	1,3233	2,7055	3,8415	5,0239	6,6349	10,8276

Soit petit $p = P(x^2 > 12)$, on lit que $P(x^2 < 12) > 0,999$ donc $P(x^2 > 12) < 0,001$.

$p < \alpha(5\%)$ donc on rejette l'hypothèse nulle au niveau de significativité $p < 0,001$.

E VRAI Même si notre hypothèse est bilatérale, rejeter H_0 nous permet de conclure sur le sens de la différence observée. On peut donc considérer que la prévalence de la maladie d'Alzheimer après 85 ans dans cette région est plus importante que celle généralement admise.

Question 12 : BCDE

A FAUX Les tests parfaits (Gold Standard) doivent atteindre en courbe ROC le coin supérieur gauche.

B VRAI Le point B est très spécifique ($1 - Sp$). Ainsi il permet de bien exclure les enfants non infectés.

C VRAI Au point A $Se = 0,8$ et $Sp = 0,4$. La sensibilité est meilleure que la spécificité, donc pour ce seuil les enfants infectés seront mieux classés que les non infectés.

D VRAI $RV+ = \frac{Se}{1 - Sp} = \frac{0,8}{0,6}$ (pour A) et $\frac{0,55}{0}$ (pour B) donc pour B on tend vers $+\infty$

E VRAI Car dans ce cas il vaut mieux prendre un seuil peu sensible et très spécifique pour éviter de faire trop de diagnostic à tort !

Question 13 : ABCD

A VRAI La VPP : $\frac{VP}{VP + FP} = \frac{60}{60+0} = 100\%$

B VRAI $Se = \frac{VP}{VP + FN} = \frac{60}{60+60} = 50\%$

C VRAI La probabilité pré-test est tout simplement $120 / 400 = 30\%$. C'est le nombre de cas sur le total (prévalence).

/!\ On peut trouver cette prévalence seulement si l'échantillon est représentatif de la population étudiée.

D VRAI Pour savoir si ce test est un bon test lorsqu'il est positif on doit trouver le RV+

$$RV+ = \frac{Se}{1 - Sp}$$

Se = 50%

$$Sp = \frac{VN}{VN + FP} = \frac{280}{280 + 0}$$

Donc Sp vaut 1 donc 1-Sp vaut 0 donc le RV+ tend vers l'infini ! C'est donc un excellent test lorsque ce dernier est positif !!!

NB : On pouvait aussi se servir de la VPP (probabilité d'être malade sachant que le test est positif) calculée à l'item A, qui était de 100%.

E FAUX La VPP et la VPN dépendent à la fois des propriétés intrinsèques du test et de la prévalence. Ici, la prévalence est calculable à partir de l'échantillon de l'étude (cf. item C), donc on retrouve VPP et VPN avec les Vrai et Faux Positif ainsi que Vrai et Faux Négatif. Ici tout est donné dans le tableau.

Question 14 : BDE

A FAUX et **B VRAI** Sur les 10 000 hommes il y a eu 60 cas en 18 ans... donc 3,3 (60 / 18) cas par an...

$$\text{taux d'incidence} = \frac{\text{nbre de cas}}{\text{personne} - \text{année}} = \frac{60}{18 * 10\ 000} \approx \frac{3}{10\ 000}$$

Donc il y a un taux d'incidence d'environ 3 pour 10 000 par an.

C FAUX et **D VRAI** Pour ceux buvant 1 à 3 fois de l'alcool par semaine, l'intervalle de confiance à 95% inclut 1 donc on ne peut pas dire significativement qu'il y ait une augmentation du risque bien que la valeur du TR soit de 1,1. En revanche pour ceux buvant de 4 à 7 fois par semaine, l'IC à 95% a sa borne inférieure à 2,1 soit bien supérieure à 1. Donc il est presque certain que le TR est bien supérieur à 1 donc que le risque soit bien plus élevé.

E VRAI La consommation de tabac est un facteur de confusion à partir du moment où ce facteur influence en lien le facteur étudié (ici la consommation d'alcool). Avec cette information il est plus dur de définir si le risque de cancer provient de l'alcool ou du tabac le tabac induisant une plus forte consommation d'alcool dans l'étude.