Part VI
Lois générales des réseaux en alternatif

1 Lois générales

1.1 Equations électrocinétiques

Toutes les lois electrocinétiques établies en régime continu peuvent être généralisées aux réseaux en régime alternatif à condition de remplacer les courants continus dans les k branches et les tensions continues pour les m dipôles par :

- soit les grandeurs instantanées $i_k(t)$ et $v_m(t)$
- soit par les grandeurs complexes associées $\bar{i}_k(t)$ et $\bar{v}_m(t)$.

1.2 Loi d'Ohm généralisée

Par généralisation des résultats obtenus pour les dipôles actifs et passifs en courant continue on écrit la loi d'Ohm généralisée pour des variables complexes :

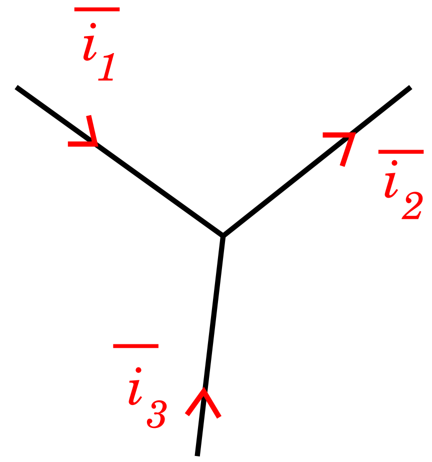
dipôle passif	$\overline{U} = \overline{Z}\,\bar{i}$
dipôle actif	$\overline{U} = \bar{e} - \overline{Z}\,\bar{i}$

1.3 Lois de Kirchhoff

1.3.1 Loi des nœuds : 1ière loi de Kirchhoff

$$\boxed{\sum_n \epsilon_n \bar{i}_n = 0}$$

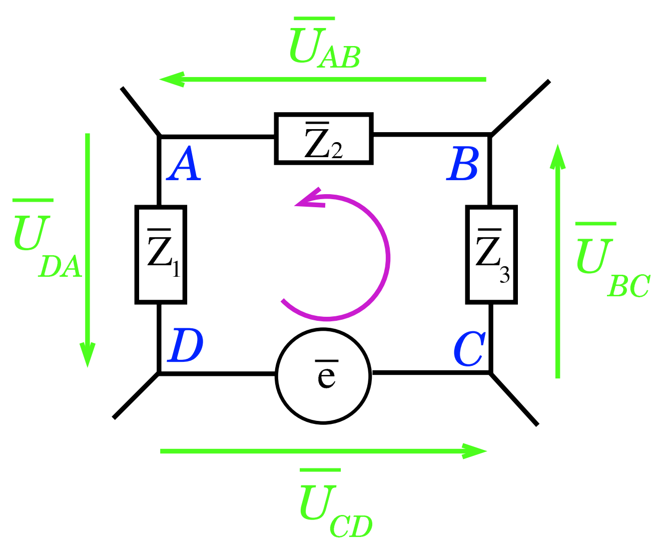
$$\bar{i}_1 + \bar{i}_3 - \bar{i}_2 = 0$$



1.3.2 Loi des mailles : 2ième loi de Kirchhoff

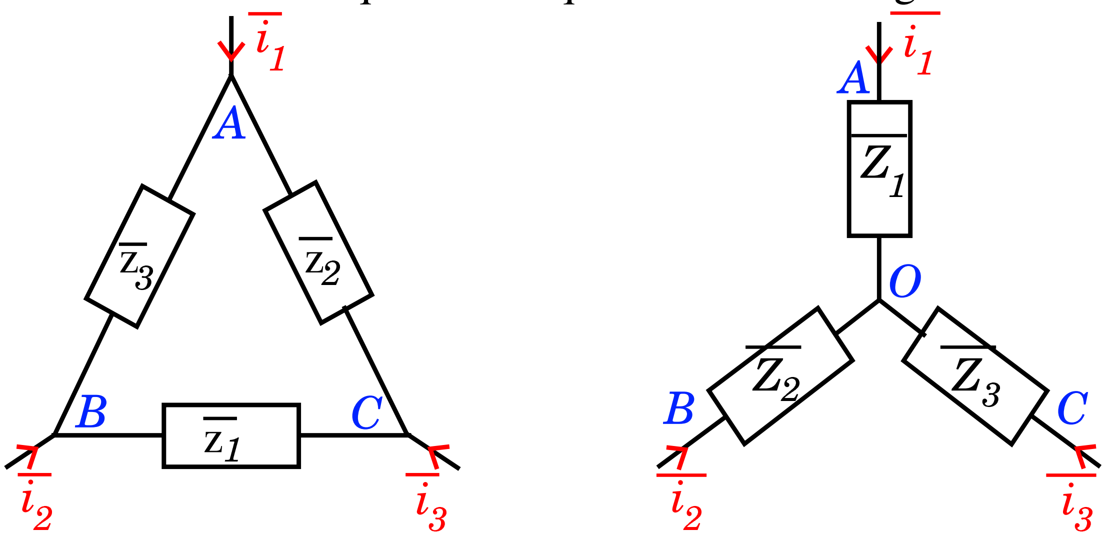
$$\boxed{\sum_k \overline{U}_k = 0}$$

$$\overline{U}_{AB} + \overline{U}_{BC} + \overline{U}_{CD} + \overline{U}_{DA} = 0$$



1.4 Théorème de Kennelly (Triangle → Etoile)

La démonstration est identique à celle qui a été faite en régime continue :



$$\overline{Z}_1 = \frac{\overline{z}_2\overline{z}_3}{\overline{z}_1 + \overline{z}_2 + \overline{z}_3}$$

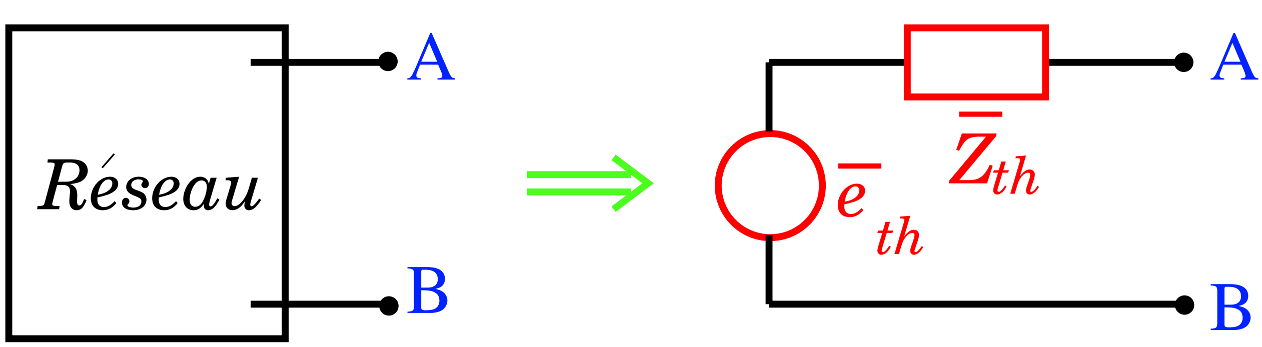
$$\overline{Z}_2 = \frac{\overline{z}_1\overline{z}_3}{\overline{z}_1 + \overline{z}_2 + \overline{z}_3}$$

$$\overline{Z}_3 = \frac{\overline{z}_1\overline{z}_2}{\overline{z}_1 + \overline{z}_2 + \overline{z}_3}$$

1.5 Théorème de Thévenin

Tout réseau dipôlaire de bornes A et B est équivalent à un générateur de tension (dit générateur de Thévenin) :

- de f.e.m. $\overline{e}_{th}$ égale à la d.d.p. $\overline{V}_A - \overline{V}_B$ en circuit ouvert.
- d'impédance $\overline{Z}_{th}$ égale à l'impédance équivalente du dipôle entre A et B à "sources éteintes".



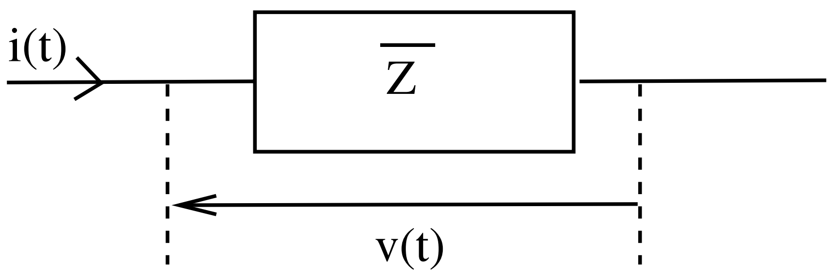
2 La puissance en alternatif

2.1 Puissance instantannée

On définit la puissance instantanée $p(t)$ aux bornes d'un dipôle par :

$$\boxed{p(t) = u(t) \cdot i(t)}$$

avec $u(t) = U_m \cos(\omega t)$ et $i(t) = I_m \cos(\omega t + \phi)$



L'énergie mise en jeu par ce dipôle entre t et $t + dt$ est égale à :

$$\boxed{dW \;=\; p(t)dt \;=\; u(t) \cdot i(t) \text{ dt}}$$

$$\boxed{dW \;=\; p(t)dt \;=\; I_m \, U_m \cos(\omega t) \cos(\omega t + \phi)dt}$$

2.2 Puissance moyenne ou active

1. Puissance active en fonction de I_m et U_m :

   La puissance moyenne ou puissance active mise en jeu aux bornes d'un dipôle est la valeur moyenne de la puissance instantanée sur une période T :

$$P_a \; = < p(t) > = \frac{1}{T}\int_0^T p(t)dt$$

   On exprime la puissance active en fonction des tensions et intensités maximales U_m et I_m ainsi qu'en fonction du déphasage ϕ entre la tension et le courant en calculant cette dernière intégrale :

$$\begin{aligned}
P_a &= \frac{1}{T}\int_0^T U_m I_m \cos(\omega t)\cos(\omega t+\phi)dt \\
&= \frac{U_m I_m}{T}\int_0^T \cos(\omega t)(\cos(\omega t)\cos(\phi) - \sin(\omega t)\sin(\phi))dt \\
&= \frac{U_m I_m}{T}\int_0^T \cos^2(\omega t)\cos(\phi)dt \\
&\quad -\frac{U_m I_m}{T}\int_0^T \cos(\omega t)\sin(\omega t)\sin(\phi)dt \\
&= \frac{U_m I_m \cos(\phi)}{T}\int_0^T \cos^2(\omega t)dt \\
&\quad -\frac{U_m I_m \sin(\phi)}{T}\int_0^T \cos(\omega t)\sin(\omega t)dt \\
&= \frac{U_m I_m \cos(\phi)}{T}\frac{T}{2}
\end{aligned}$$

   On obtient la relation de la puissance active :

$$\boxed{P_a \; == \; \tfrac{1}{2}U_m I_m \cos(\phi) = U_e I_e \cos(\phi)}$$

Le terme $\cos(\phi)$ est appelé le facteur de puissance. Plus le déphasage entre tension et courant est faible plus le facteur de puissance est élevé.

2. Puissance active en fonction d'une impédance $\overline{Z}$:

   La puissance au borne d'un dipôle d'impédance $\overline{Z} = R + jX$ est donnée par :

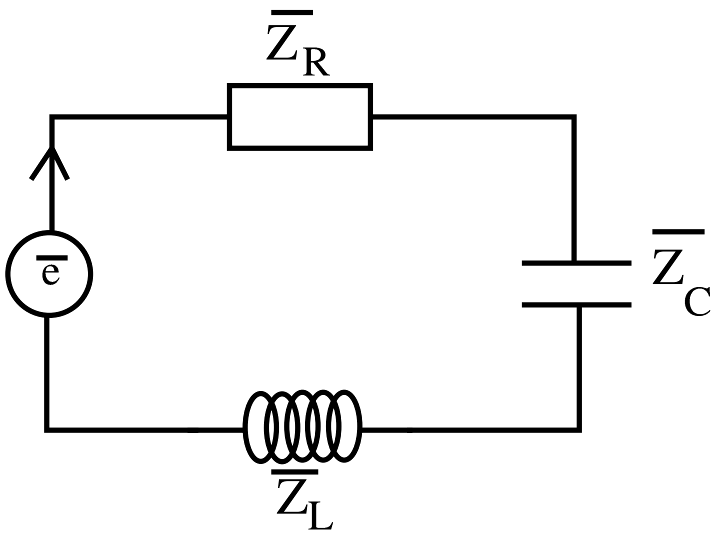
$$\begin{aligned}
\overline{P}_a &= \frac{1}{T}\int_0^T \overline{Z}\overline{i}^2(t)dt \\
&= \frac{\overline{Z}I_m^2}{T}\int_0^T \cos^2(\omega t + \phi)dt \\
&= \frac{\overline{Z}I_m^2}{T}\frac{T}{2} \\
&= \overline{Z}I_e^2
\end{aligned}$$

   Pour d'obtenir la puissance active réelle il suffit de prendre la partie réelle de l'expression complexe de la partie active :

$$\boxed{P_a = |\overline{P}_a| \; = \; RI_e^2}$$

3 Exemple : Circuit R,L,C en série

Considérons un réseau constitué d'une résistance R, d'un condensateur C, d'une inductance L et d'un générateur de tension sinusoïdale $e(t) = Ecos(\omega t + \phi)$.



3.1 Equations de base()

D'après la 2$^{\text{ième}}$ loi de Kirchhoff on peut écrire :

$$\begin{aligned} 0 &= U_R + U_L + U_C - e(t) \\ e\cos(\omega t) &= Ri(t) + L\frac{di(t)}{dt} + \frac{1}{C}\int i(t)dt \end{aligned}$$

En posant :

$$\overline{e} = Ee^{j(\omega t+\phi)} = Ee^{j\phi}e^{j\omega t} = \overline{E}e^{j\omega} \qquad \text{et} \qquad \overline{i} = \overline{I}e^{j\omega t} = Ie^{j\omega t}$$

et en utilisant la loi d'Ohm généralisée pour les dipôles passifs étendue à la représentation complexe, $\overline{U} = \overline{Z}\,\overline{i}$, nous pouvons écrire la relation sur la maille en représentation complexe :

$$\begin{aligned} 0 &= \overline{U}_R + \overline{U}_L + \overline{U}_C - \overline{e}(t) \\ \overline{e}(t) &= \overline{Z}_L\overline{i} + \overline{Z}_R\overline{i}(t) + \overline{Z}_C\overline{i}(t) \end{aligned}$$

En remplacant chacune des impédances complexes par leur valeur on obtient une relation linéaire entre $\overline{e}(t)$ et $\overline{i}(t)$:

$$\boxed{\overline{e}(t) = jL\omega\overline{i} + R\overline{i}(t) + \frac{1}{jC\omega}\overline{i}(t)}$$

$$\overline{e}(t) = (R + jL\omega + \frac{1}{jC\omega})\overline{i}(t)$$

$$\boxed{\overline{e}(t) = (R + jX)\overline{i}(t) = \overline{Z}\ \overline{i}(t)}$$

avec $X = L\omega - \frac{1}{C\omega}$

En passant dans la représentation complexe nous venons de faire l'économmie de la résolution d'une équation différentielle du second ordre en $q(t)$ avec second membre. L'expression du courant en fonction de la tension est alors égale à :

$$\boxed{\overline{i} = \frac{\overline{e}}{R+j\left(L\omega-\frac{1}{C\omega}\right)}}$$

Cette relation nous donne l'expression du déphasage entre tension et courant ainsi que la valeur de l'impédance du réseau par identification des parties réellles et complexes ou module et phase :

$$\begin{aligned}
|\overline{i}| = I &= \frac{|\overline{e}|}{|R + jX|} \\
I &= \frac{E}{\sqrt{R^2 + (L\omega - \frac{1}{C\omega})^2}} \\
I &= \frac{E}{R\sqrt{1 + (\frac{L\omega}{R} - \frac{1}{RC\omega})^2}}
\end{aligned}$$

Le déphasage entre intensité et tension est défini par :

$$\tan\phi = \frac{L\omega - \frac{1}{C\omega}}{R}$$

Nous voyons dans ces deux dernières expressions que le module et la phase de l'impédance aux bornes du circuit R,L,C en série est dépendant de la pulsation du générateur.

3.2 Résonance

On remarque que le module de l'impédance complexe devient maximum pour la valeur particulière de la pulsation ω_0 définie par :

$$\boxed{\omega_0 = 1/\sqrt{LC}}$$

On appelle ω_0 la pulsation propre du circuit R,L,C série. On définit également le facteur de qualité Q par la relation :

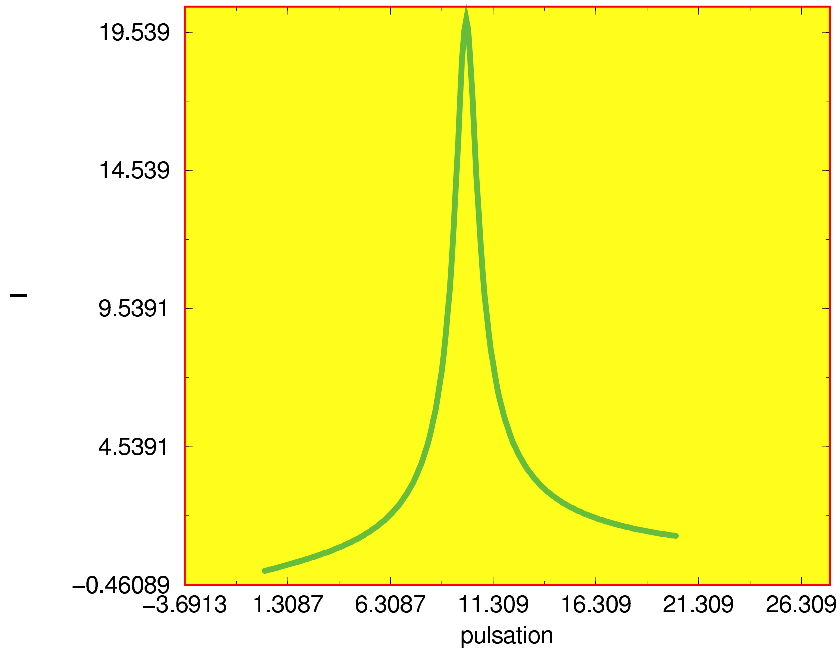
$$\boxed{Q = \frac{L\omega_0}{R} = \frac{1}{RC\omega_0}}$$

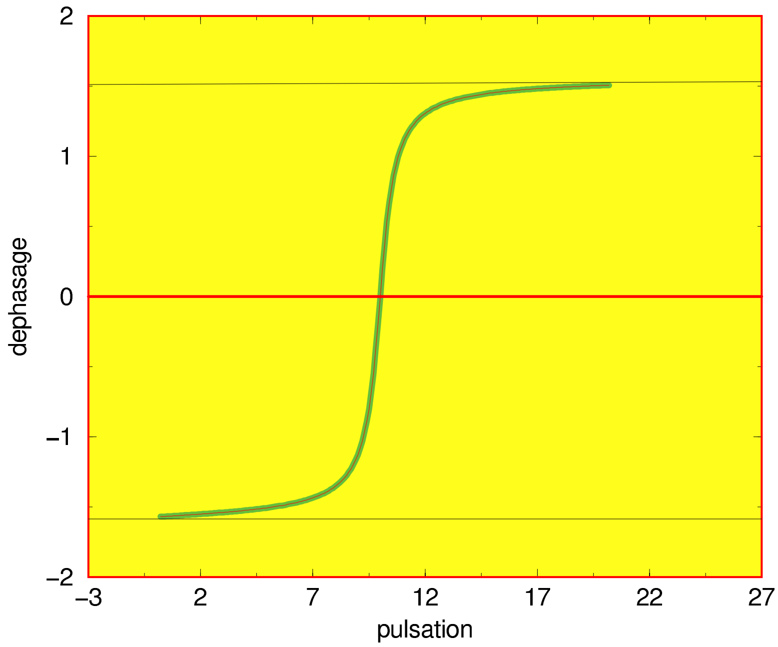
L'impédance d'un circuit R,L,C en śerie s'écrit :

$$\boxed{I = \frac{E}{R\sqrt{1+Q^2\left(\frac{\omega}{\omega_0}-\frac{\omega_0}{\omega}\right)^2}}}$$

et le déphasage de sa tension par rapport à $i(t)$:

$$\boxed{\tan\phi = Q\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)}$$





3.3 Méthode de Fresnel

Les résultats que nous venons d'obtenir concernant l'impédance complexe d'un circuit R,L,C en śerie peuvent également être obtenu par la méthode de Fresnel. Cette méthode consiste à ajouter vectoriellement les tensions complexes aux bornes de chaque dipôles. La résultatnte est la tension rechechée : son module et son déphasage sont respectivement l'impédance Z et le déphasage entre tension et intensité.