# Part V

# Le Courant alternatif sinusoïdal

## 1 Définitions

### 1.1 Les fonctions périodiques

1. Fonction périodique

   Une fonction $f(t)$ est périodique si $f(t) = f(t + kT)$ où $k$ est un entier et $T$ est la période en seconde. La fréquence $N = 1/T$ s'exprime en Hertz (Hz).

2. Fonction alternative

   Une fonction $f(t)$ est alternative si elle vérifie :

   $f(t) \ = \ -f(t+T/2) \quad \forall$ t.

3. Fonction sinusoïdale

   Une fonction sinusoïdale est de la forme :

   * $f(t) = a\cos(\omega t + \phi)$
   * $\omega = 2\pi N = 2\pi/T$ est la pulsation,
   * $a$ l'amplitude maximale et
   * $\phi$ la phase à l'origine ou couramment appelée déphasage.

   **Q :** vérifier que cette fonction est périodique et alternative.

   **Remarque :** une fonction sinusoïdale s'écrit sous différentes formes :

$$\begin{aligned} f(t) &= a\cos(\omega t + \phi) \\ &= a\cos(\omega t)\cos(\phi) - a\sin(\omega t)\sin(\phi) \\ &= A\cos(\omega t) + B\sin(\omega t) \end{aligned}$$

4. Valeurs moyenne et valeur efficace

- Définition :
  La valeur moyenne temporelle $< f(t) >$ d'une fonction $f(t)$ entre deux instants $t_1$ et $t_2$ est définie par :

$$< f(t) >= \frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} f(t)dt$$

  La valeur efficace $f_{eff}$ d'une fonction $f(t)$ sur une période $T$ est définie par :

$$(f_{eff})^2 = \frac{1}{T} \int_0^T f^2(t)dt$$

- Valeur efficace et valeur moyenne d'une fonction sinusoïdale définie par :

$$i(t) = I_m cos(\omega t + \phi)$$

  Dans cette relation $I_m$ est la valeur maximale de la fonction $i(t)$.

  Valeur moyenne :

$$\begin{aligned}
< i(t) > &= \frac{1}{T} \int_0^T I_m \cos(\omega t + \phi)dt \\
&= \frac{I_m}{T} \left[ \frac{1}{\omega} \sin(\omega t + \phi) \right]_0^T \\
&= \frac{I_m}{T\omega} (\sin(2\pi + \phi) - \sin(\phi)) \\
&= 0
\end{aligned}$$

$$\boxed{< i(t) >= 0}$$

Valeur efficace :

$$\begin{aligned}
(I_{eff})^2 &= \frac{1}{T}\int_0^T (I_m\cos(\omega t+\phi))^2 dt \\
&= \frac{I_m^2}{T}\int_0^T \cos(\omega t+\phi)\cos(\omega t+\phi) dt \\
&= \frac{I_m^2}{T}\int_0^T \cos(\omega t+\phi)\frac{d(\sin(\omega t+\phi))}{\omega} \\
&= \frac{I_m^2}{T}\left[\frac{1}{\omega}\cos(\omega t+\phi)\sin(\omega t+\phi)\right]_0^T \\
&\quad +\frac{I_m^2}{T}\int_0^T \sin^2(\omega t+\phi)dt \\
&= \frac{I_m^2}{T}\int_0^T (1-\cos^2(\omega t+\phi))dt \\
&= I_m^2 - \frac{I_m^2}{T}\int_0^T \cos^2(\omega t+\phi)dt \\
(I_{eff})^2 &= I_m^2 - (I_eff)^2 \\
2(I_{eff})^2 &= I_m^2 \\
I_{eff} &= \frac{I_m}{\sqrt{2}}
\end{aligned}$$

$$\boxed{I_{eff} = I_m/\sqrt{2}}$$

5. Le courant alternatif sinusoïdal est généralement défini par :

$$\boxed{i(t) = I_m\cos(\omega t+\phi) = I_{eff}\sqrt{2}\cos(\omega t+\phi)}$$

6. La tension alternative sinusoïdale est définie de la même manière par :

$$\boxed{v(t) = V_m\cos(\omega t+\psi) = V_{eff}\sqrt{2}\cos(\omega t+\psi)}$$

## 1.2 La notation complexe

1. Définition et propriétés des nombres complexes

   (a) Définition :

   Un nombre complexe $\overline{z}$ est défini à partir de 2 nombres réels $x$ et $y$ et un nombre imaginaire $i$ (qui vérifie $i^2 = -1$) par la relation :

   $$\boxed{\overline{z} = x + iy}$$

   Remarque : pour ne pas confondre dans la suite du cours l'expression du courant $i(t)$ avec le nombre imaginaire $i$, on utilisera la notation $j$ pour ce dernier :

   $$\boxed{\overline{z} = x + jy}$$

   (b) Comlpexe conjugué de $\overline{z}$ :

   $$\boxed{\overline{z}^* = x - jy}$$

   (c) Module d'un nombre comlpexe $\rho$ :

   $$\boxed{\rho = |\overline{z}| = z = \sqrt{\overline{z}\overline{z}^*} = \sqrt{x^2 + y^2}}$$

   (d) Argument d'un nombre complexe :

   $$\boxed{\tan\theta = y/x}$$

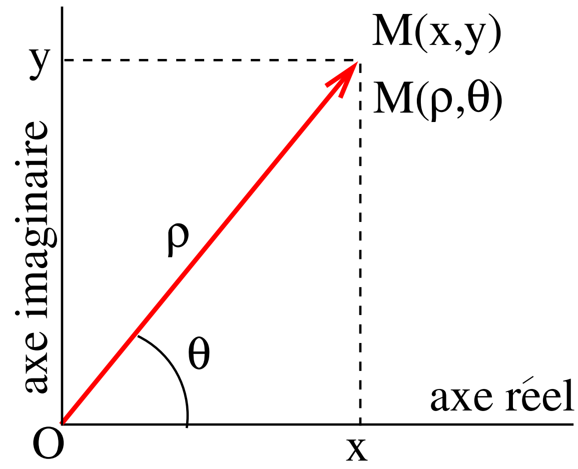
   (e) Forme polaire d'un nombre complexe :

   $$\boxed{\overline{z} = \rho e^{j\theta} = \rho(\cos\theta + j\sin\theta)}$$

   On retrouve bien à partir de cette cette définition les expressions reliant $(x, y)$ et $(\rho, \theta)$

2. Représentation d'un nombre complexe

L'écriture polaire d'un nombre complexe rappelle le système de coordonnées polaire $(\rho, \theta)$. La figure ci-contre représente par un point M le nombre complexe $\overline{z} = x + jy = \rho e^{j\theta}$ dans les système de coordonnées $(Oxy)$ et $(O\rho\theta)$. le vecteur $\overrightarrow{OM}$ est défini par ces coordonnées $(x, y)$ où $(\rho, \theta)$.




3. Opérations simples sur les nombres complexes

Soient deux nombres complexes $\overline{z_1}$ et $\overline{z_2}$ définis par :

$\overline{z_1} = x_1 + jy_1 = \rho_1 e^{j\theta_1}$ et $\overline{z_2} = x_2 + jy_2 = \rho_2 e^{j\theta_2}$.

- Egalité : $\overline{z_1} = \overline{z_2} \Longleftrightarrow x_1 = x_2$ **et** $y_1 = y_2$
- Addition et soustraction :

$$\begin{aligned} \overline{z_1} + \overline{z_2} &= (x_1 + x_2) + j(y_1 + y_2) \\ \overline{z_1} - \overline{z_2} &= (x_1 - x_2) + j(y_1 - y_2) \end{aligned}$$

- Multiplication et division :

$$\begin{aligned} \overline{z_1} \times \overline{z_2} &= (x_1 + jy_1) \times (x_2 + jy_2) \\ &= (x_1x_2 - y_1y_2) + j(x_1y_2 + y_1x_2) \\ \frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}} &= \frac{x_1 + jy_1}{x_2 + jy_2} = \frac{x_1 + jy_1}{x_2 + jy_2} \times \frac{x_2 - jy_2}{x_2 - jy_2} \\ &= \frac{x_1x_2 + y_1y_2}{x_2^2 + y_2^2} + j\frac{y_1x_2 - x_1y_2}{x_2^2 + y_2^2} \end{aligned}$$

Plus direct en polaire :

$$\begin{aligned} \overline{z_1} \times \overline{z_2} &= \rho_1 e^{j\theta_1} \times \rho_2 e^{j\theta_2} = \rho_1\rho_2 e^{j(\theta_1+\theta_2)} \\ \frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}} &= \frac{\rho_1 e^{j\theta_1}}{\rho_2 e^{j\theta_2}} = \frac{\rho_1}{\rho_2} e^{j(\theta_1-\theta_2)} \end{aligned}$$

- Exponentiation et formule de Moivre :

$$\begin{aligned}\overline{z_1}^n &= \rho_1^n e^{jn\theta_1}\\ \overline{z_1}^n &= \rho_1^n(\cos(n\theta_1)+j\sin(n\theta_1))\end{aligned}$$

4. Représentation complexe d'une fonction sinusoïdale

   Prenons l'exemple d'un courant sinusoïdal d'amplitude $I_m$ de pulsation $\omega$ et de déphasage $\phi$ : $i(t) = I_m \cos(\omega t + \phi)$.

   On associe à cette fonction réelle une fonction complexe :

$$\boxed{\bar{i}(t) = I e^{j\phi} e^{j\omega t} = \overline{I} e^{j\omega t}}$$

   L'intensité maximale $I$ est bien donnée par le module de $I$, $|\overline{I}|$ et le déphasage par $\phi$. Remarquer que $|\overline{I}|$ est bien indépendant du temps.

5. Dérivation et intégration d'une fonction complexe

   Soit la fonction complexe du courant $\bar{i}(t) = \overline{I}e^{j\omega t}$

   La dérivé de cette fonction comlexe est égale à :

$$\frac{d\bar{i}(t)}{dt} = j\omega\overline{I}e^{j\omega t}$$

   ou encore : $$\boxed{\frac{d\bar{i}(t)}{dt} = j\omega\bar{i}}$$

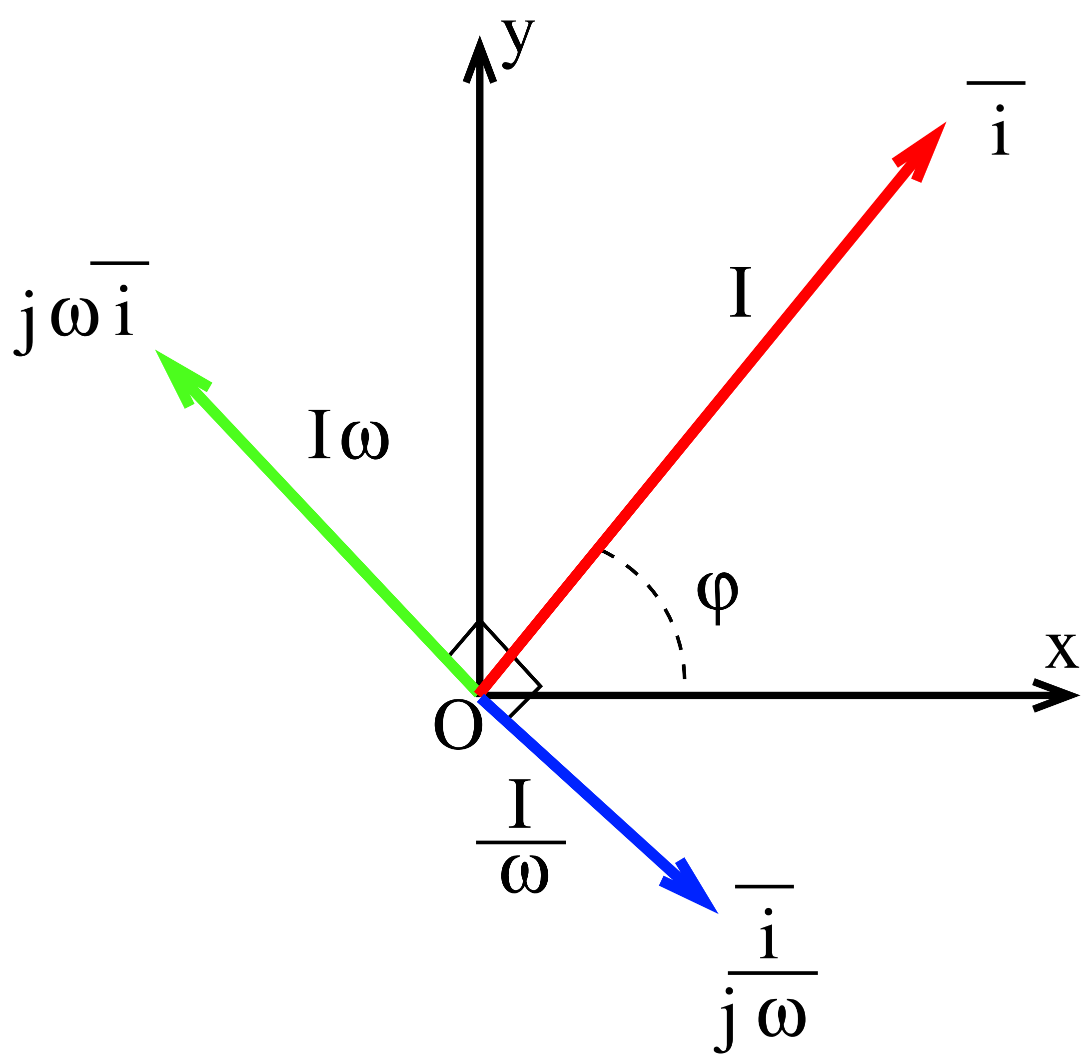
   L'intégrale de $i(t)$ est égale à :

$$\int \bar{i}(t)dt = \frac{1}{j\omega}\overline{I}e^{j\omega t}$$

   ou encore : $$\boxed{\int \bar{i}(t)dt = \frac{\bar{i}}{j\omega}}$$

6. Représentation dans le plan complexe

D'après les relations de dérivation et d'intégration précédentes on remarque que la dérivation provoque une rotation de 90° dans le sens trigonométrique par rapport à la phase de $\bar{i}$ (avance de phase de 90°) et que l'intégration provoque une rotation de $-90°$ par rapport à $\bar{i}$ (retard de phase de 90 °).



# 2 Notion d'impédance complexe

## 2.1 Introduction

Dans un réseau quelconque peuvent exister des résistances , des bobines , des condensateurs , des générateurs de tension sinusoïdales et des récepteurs. Après disparition du régime transitoire seul subsiste un régime permanent (dit forcé ou entretenu).

Le but de l'étude d'un réseau est de déterminer d'une part les courants dans les différentes branches avec leur amplitude ou leur valeur efficace et d'autre part leur déphasage par rapport à la tension fournie par un générateur.

Après application de la méthode de résolution utilisée pour les régimes continues nous avons à résoudre (comme pour le cas des régimes transitoires) une équation différentielle.

Or nous venons de voir que la dérivation et l'intégration du courant en représentation complexe était particulièrement simple et surtout linéaire. C'est donc dans un but simplificateur que l'on étudiera en représentation complexe les réseaux à courants alternatifs sinusoïdaux. Nous avons besoin à cet effet d'introduire la notion d'impédance. Pour obtenir les résultats physiques il suffira de prendre systématiquement la partie réelle de la variable complexe associée.

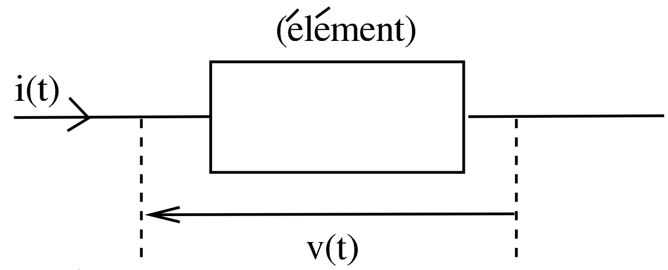
## 2.2 Impédance complexe : définition

Pour un générateur délivrant une tension $e(t) = E\cos(\omega t)$ on peut associé une tension complexe $\overline{e} = Ee^{j\omega t}$. On exprime par $i(t) = I\cos(\omega t + \phi)$ le courant alternatif passant dans le dipôle (résistance, self, condensateur) et par $v(t)$ la tension au borne de ce dipôle. On associe au courant et à la tension aux bornes du dipôle considéré une représentation complexe $\overline{i}(t)$ et $\overline{v}(t)$. L'impédance complexe $\overline{Z}$ est l'extension au cas complexe du facteur de proportionnalité entre tension et courant :

$$\boxed{\overline{v}(t) = \overline{Z}\ \overline{i}(t)}$$

On utilisera souvent par la suite les notations $\overline{v} = \overline{v}(t)$ et $\overline{i} = \overline{i}(t)$

Convention générale :




Définition des impédances complexes :

| | Tension réelle |
|---|---|
| résistance R | $v = Ri$ |
| self L | $v = L\frac{di}{dt}$ |
| condensateur C | $v = \frac{q}{C} = \frac{1}{C}\int idt$ |

| | Tension complexe |
|---|---|
| résistance R | $\overline{v} = R\overline{i} = \overline{Z}_R\overline{i}$ |
| self L | $\overline{v} = L\frac{d\overline{i}}{dt} = jL\omega\overline{i} = \overline{Z}_L\overline{i}$ |
| condensateur C | $\overline{v} = \frac{1}{C}\int\overline{i}dt = \frac{1}{jC\omega}\overline{i} = \overline{Z}_C\overline{i}$ |

Résumons :

| Dipôle | Impédance complexe |
|---|---|
| résistance R | $\boxed{\overline{Z} \; = \; R}$ |
| self L | $\boxed{\overline{Z} \; = \; j\,L\omega}$ |
| condensateur C | $\boxed{\overline{Z} \; = \; \frac{1}{jC\omega}}$ |

De manière générale une impédance complexe est de la forme :

$$\boxed{\overline{Z} = R + jX}$$

où $R$ est la résistance et $X$ la réactance.

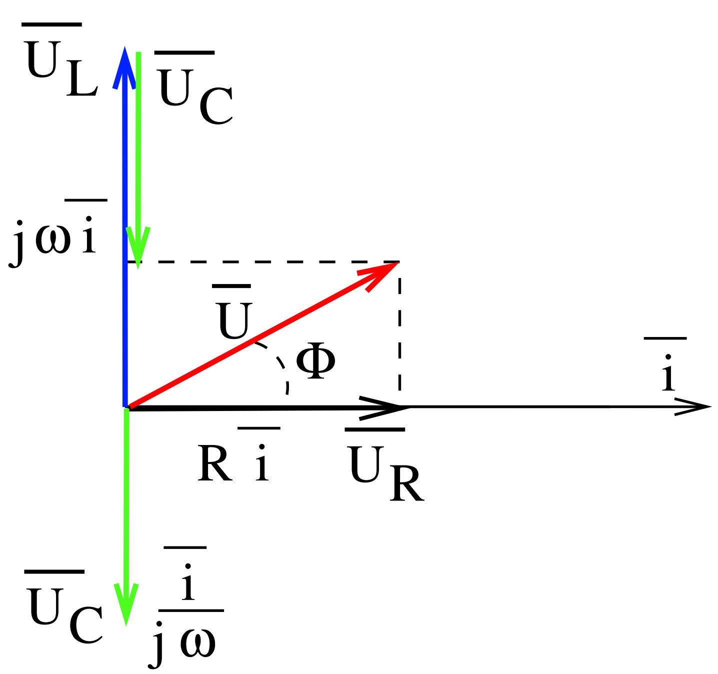
De la même manière, l'inverse d'une impédance complexe, appelée admittance est de la forme:

$$\boxed{\frac{1}{\overline{Z}} = \overline{Y} = G + jS}$$

où $G$ est la conductance et $S$ la suspectance.

## 2.3 Diagramme de Fresnel

La méthode de Fresnel se base sur la représentation dans le plan complexe des tensions complexes aux bornes de chaque dipôle. Elle permet d'une part d'avoir une visualisation rapide des déphasages induit par chacun des dipôles en série et permet d'autre part de faire les calculs d'impédances en série. L'impédance complexe associée à la tension complexe $\overline{U} = \overline{Z}\overline{i}$ aux bornes de l'ensemble de ces dipoles en série est obtenue graphiquement en faisant la somme vectorielle des tensions de chaque dipôle.



## 2.4 Association d'impédances complexes

On retrouve des relations indentiques à celles obtenues pour le régime continu :

| Association | |
| --- | --- |
| en série | $\overline{Z} = \sum_{i=1}^{n} \overline{Z}_i$ |
| en // | $\overline{Y} = \frac{1}{\overline{Z}} = \sum_{i=1}^{n} \overline{Y}_i = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\overline{Z}_i}$ |

On obtient les amplitudes réelles en prenant les modules de l'expression $\overline{v} = \overline{Z}\,\overline{i}$, soit $v = Z\,i$
avec $Z = |\overline{Z}| = \sqrt{R^2 + X^2}$

## 2.5 Ponts d'impédances

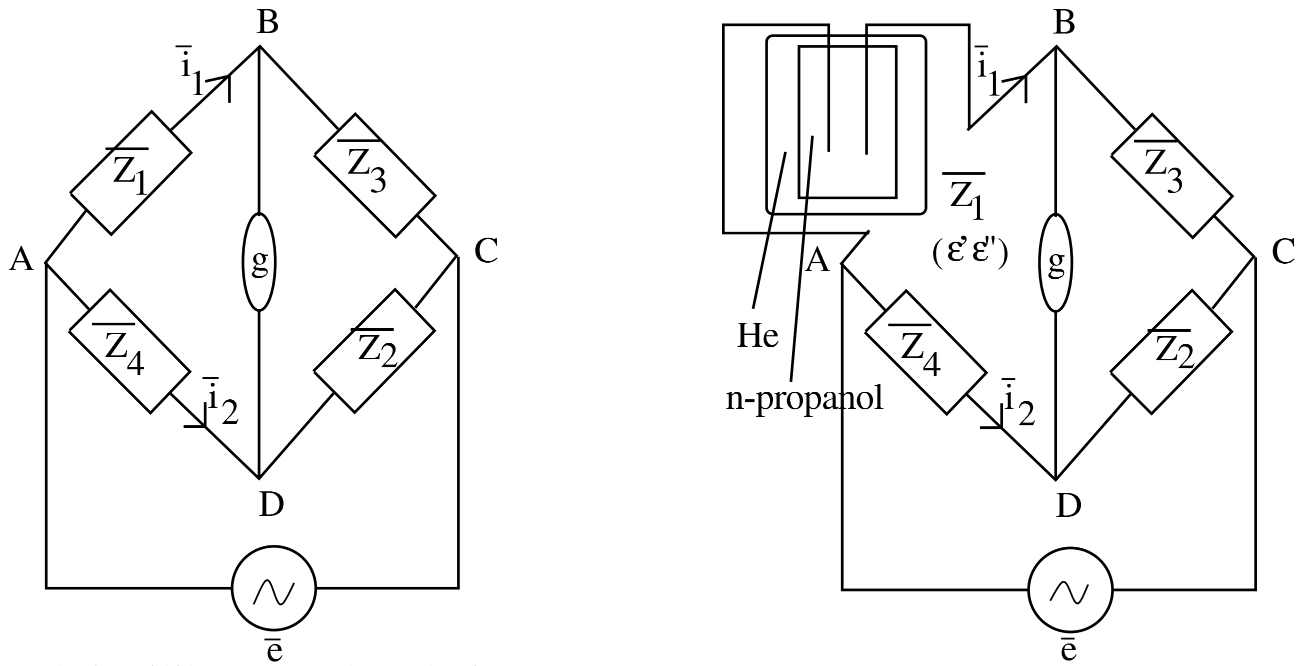
Les ponts d'impédances sont souvent utilisés pour mesurer les caractéristiques d'une impédance inconnue. On cherche en générale à équilibrer le pont c'est à dire à avoir les deux points B et D au même potentiel (voir figure).

A l'équilibre on a la relation :

$$\boxed{\overline{Z}_1\ \overline{Z}_2 = \ \overline{Z}_3\ \overline{Z}_4}$$

En égalant partie réelle et partie imaginaire de cette relation on obtient les caractéristiques de résistance $R_1$ et de réactance $X_1$ de l'impédance inconnue $\overline{Z}_1$

Exemple : Mesure des constantes diélectriques du n-propanol dans la théorie des diélectriques de DEBYE.




A l'équilibre on a la relation :

$$\boxed{\overline{Z}_1 \ \overline{Z}_2 = \ \overline{Z}_3 \ \overline{Z}_4}$$

Démonstration : Application du théorème de Thévenin aux bornes B et D du réseau.

$\overline{e}_{th} = \overline{V}_B - \overline{V}_D$ en circuit ouvert :

$$\overline{e}_{th} = \overline{e}\frac{\overline{Z}_3\overline{Z}_4 - \overline{Z}_1\overline{Z}_2}{(\overline{Z}_1 + \overline{Z}_3)(\overline{Z}_2 + \overline{Z}_4)}$$

Le courant $\overline{i}$ passant dans le galvanomètre est égale à :

$$\overline{i} = \frac{\overline{e}_{th}}{\overline{Z}_{th} + \overline{Z}_g}$$

$$\overline{i} = \overline{e}\frac{\overline{Z}_3\overline{Z}_4 - \overline{Z}_1\overline{Z}_2}{(\overline{Z}_1 + \overline{Z}_3)(\overline{Z}_2 + \overline{Z}_4)} \cdot \frac{1}{\overline{Z}_{th} + \overline{Z}_g}$$

A l'équilibre

$$\overline{i} = 0 \iff \overline{Z}_3\overline{Z}_4 - \overline{Z}_1\overline{Z}_2 = 0$$