Part IV
Etude des régimes transitoires

1 Approximation des régimes quasi-stationnaires

On appelle régime transitoire tout passage d'un régime permanent (ou stationnaire) à un autre régime permanent.
Bien que le régime soit variable (c'est-à-dire que l'intensité du courant varie dans le temps) on supposera qu'à chaque instant on pourra lui appliquer les lois des régimes permanents :

- Validité des lois de Kirchhoff ;
- I est constant, à un instant donné, en tout point du circuit ;
- Outre les f.e.m. des générateurs matériels, on fera intervenir les f.e.m. d'auto-induction.

C'est l'approximation des régimes quasi-stationnaires ou lentement variables. On négligera les phénomènes de propagation électromagnétique. Ce sera vrai pour les courants industriels, mais pas pour l'étude des antennes ou circuits radio.

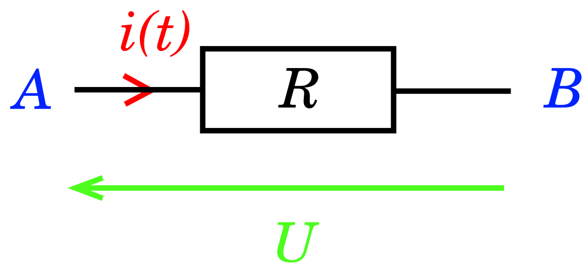
2 Dipôles électrocinétiques R, L, C

2.1 Relation courants-tensions

✔Résistance R

C'est un dipôle dont la tension $V_A - V_B$ est donnée à chaque instant par :

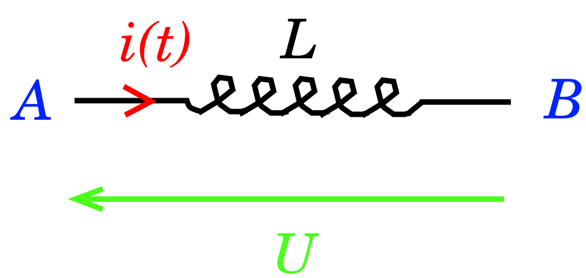
$$\boxed{V_A - V_B = U = Ri(t)}$$



✔Inductance L

C'est une source de tension de f.e.m : $e = -L\frac{di(t)}{dt}$. C'est-à-dire un dipôle dont la tension aux bornes est donnée par :

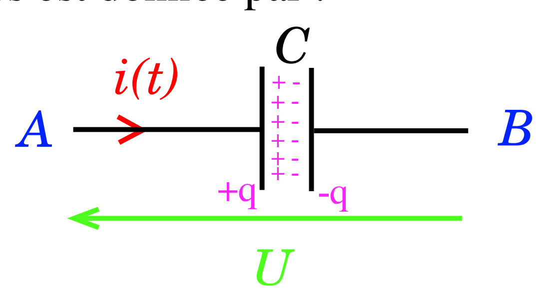
$$\boxed{V_A - V_B = U = L\frac{di(t)}{dt}}$$



✔Capacité C

C'est un dipôle dont la tension aux bornes est donnée par :

$$\boxed{V_A - V_B = U = \frac{1}{C}q(t)}$$
$$\boxed{= \frac{1}{C}\int idt}$$

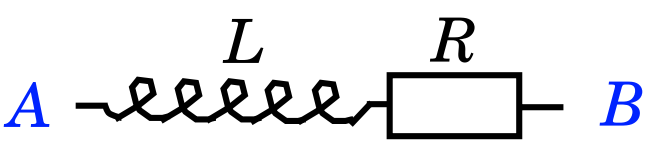


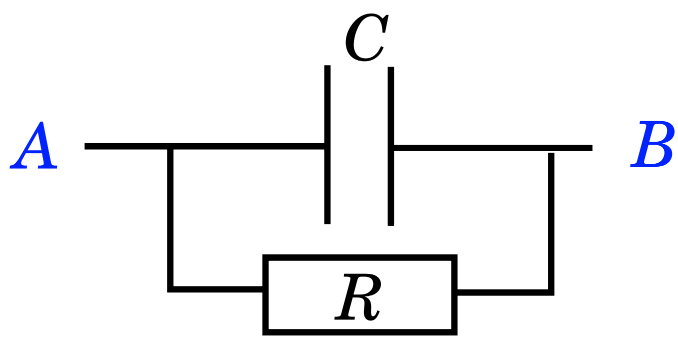
$i > 0$: charge ; $i < 0$: décharge

$q(t)$ est la charge de l'armature A, borne d'entrée du sens positif avec :

$$\boxed{i(t) = \frac{dq(t)}{dt}}$$

Nota : les éléments R, L, C définis ci-dessus, ne sont pas des objets, mais des entités théorique, des modèles. Ainsi une bobine présente toujours une inductance et une résistance, de même qu'un condensateur présente toujours une résistance de fuite due à une conductivité non nulle de son diélectrique.





2.2 Energie mise en jeu

On a vu qu'aux bornes d'un tronçon AB :

$$dW = dq(V_A - V_B) = (V_A - V_B)idt = Uidt$$

✔ **Résistance R**

$$\boxed{dW = Ri^2dt}$$

✔ **Inductance L**

$$\boxed{dW = L\frac{di}{dt}idt = Lidi = d(\frac{1}{2}Li^2)}$$

$\boxed{W = \frac{1}{2}Li^2}$ qui donne l'énergie emmagasimée dans une self L parcourue par le courant i.

✔ **Capacité C**

$$\boxed{dW = \frac{q}{C}idt = \frac{q}{C}dq = d(\frac{1}{2}\frac{q^2}{C})}$$

$\boxed{W = \frac{1}{2}\frac{q^2}{C}}$ qui donne l'énergie emmagasimée dans un condensateur de capacité C chargé avec q.

✔**Générateur E** (résistance interne négligeable)

$$\boxed{dW = Eidt}$$

✔**Récepteur e** (résistance interne négligeable)

$$\boxed{dW = eidt}$$

2.3 Pour un intervalle de temps fini

$$\boxed{W = \int_{t1}^{t2} U(t)i(t)dt}$$

3 Circuit R,C en série

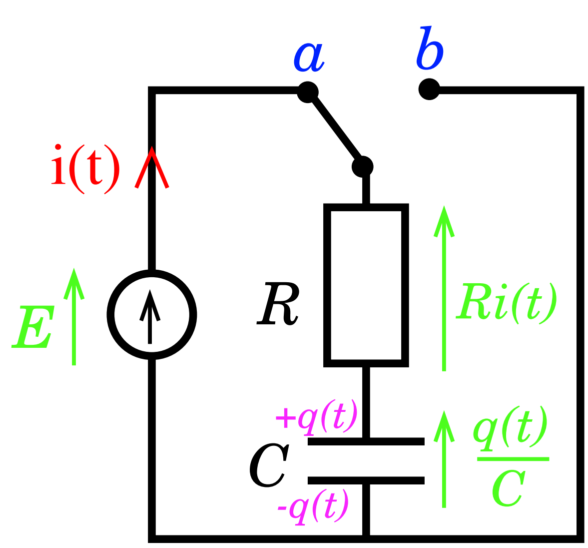
3.1 Charge du condensateur

3.1.1 Evolution de la charge et du courant en fonction de t

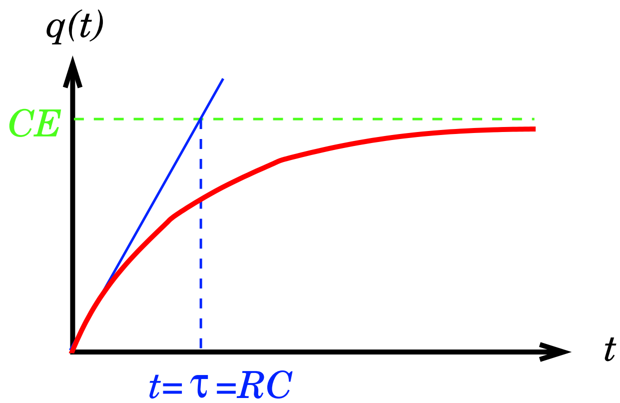
$$\boxed{R\frac{dq(t)}{dt} + \frac{q(t)}{C} = E}$$

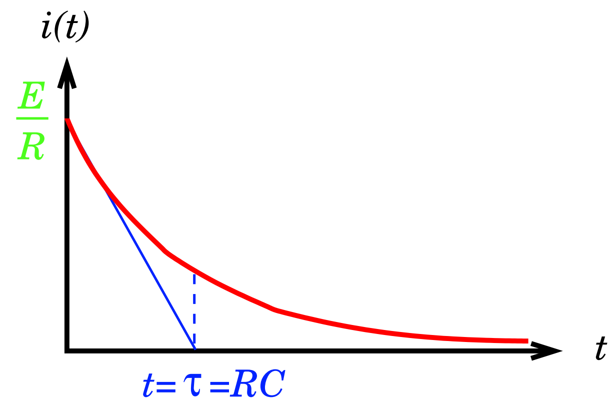
Solution générale de la forme :
$q(t) = CE + \lambda e^{-\frac{t}{RC}}$
A t=0 le condensateur est déchargé
q(t=0)=0 $\Longrightarrow$ λ=$-CE$

$$\boxed{q(t) = CE(1 - e^{-\frac{t}{RC}})}$$



L'intensité s'obtient avec $i(t) = \frac{dq}{dt}$ soit : $\boxed{i(t) = \frac{E}{R}e^{-\frac{t}{RC}}}$





En régime permanent, en courant continu, un condensateur se comporte comme un interrupteur ouvert.

3.1.2 Constante de temps du circuit R,C

En introduisant la constante de temps $\tau = RC$, homogène à un temps, les relations précédentes peuvent s'écrire :

$$\boxed{q(t) = CE(1 - e^{-\frac{t}{\tau}})} \qquad \boxed{i(t) = \frac{E}{R}e^{-\frac{t}{\tau}}}$$

La constante de temps $\tau = RC$ caractérise la rapidité avec laquelle le condensateur atteint sa charge maximale.

Remarques :

✔ La pente de la courbe $q(t)$ correspond à $\frac{dq}{dt}$ donc à $i(t)$.
✔ A t=0 l'intensité est $i(t=0) = \frac{E}{R}$.
✔ La tangente à l'origine à la courbe $q(t)$ coupe ainsi la droite $q = CE$ pour $t = \tau = RC$.

3.1.3 Etude énergétique

L'équation différentielle précédente $Ri(t) + \frac{q(t)}{C} = E$ permet d'écrire, en multipliant les différents termes par $dq(t) = i(t)dt$:

$$Ri(t)^2dt + \frac{q(t)}{C}dq(t) = Ei(t)dt$$

$\longrightarrow$ $Ei(t)dt$ = l'énergie fournie par le générateur pendant dt.
$\longrightarrow$ $Ri(t)^2dt$ = l'énergie dissipée par effet Joule pendant dt.
$\longrightarrow$ $\frac{q(t)}{C}dq(t) = d(\frac{1}{2}\frac{q(t)^2}{C})$ = l'augmentation de l'énergie électrostatique stockée dans le condensateur pendant dt.

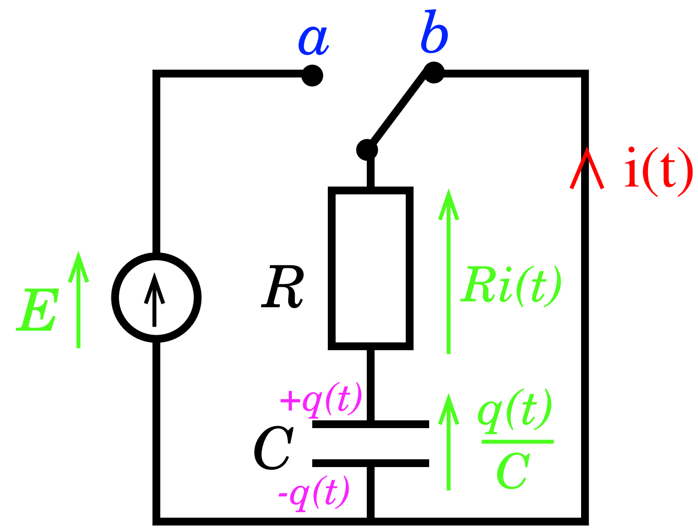
3.2 Décharge du condensateur

3.2.1 Evolution de la charge et du courant en fonction de t

$$\boxed{R\frac{dq(t)}{dt} + \frac{q(t)}{C} = 0}$$

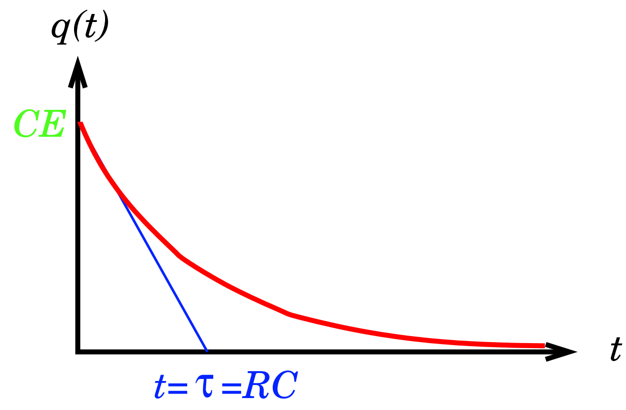
Solution générale de la forme :
$q(t) = \lambda e^{-\frac{t}{RC}}$
A $t = 0$ $q(t = 0) = Q = CE$
$\Longrightarrow \lambda = CE$

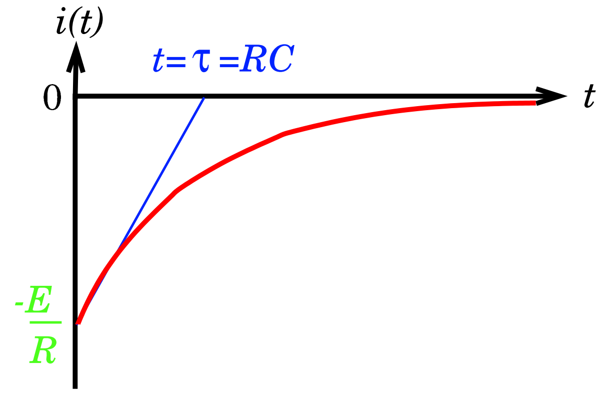
$$\boxed{q(t) = CEe^{-\frac{t}{RC}}}$$



L'intensité s'obtient avec $i(t) = \frac{dq}{dt}$ soit : $\boxed{i(t) = -\frac{E}{R}e^{-\frac{t}{RC}}}$

Evolution de la charge et du courant en fonction du temps t :





3.2.2 Constante de temps du circuit R,C

On peut vérifier que les tangentes aux courbes $q(t)$ et $i(t)$ coupent l'axe des abscisses à l'instant $t = \tau = RC$.

$$\boxed{q(t) = CEe^{-\frac{t}{\tau}}} \qquad \boxed{i(t) = -\frac{E}{R}e^{-\frac{t}{\tau}}}$$

La constante de temps $\tau = RC$ caractérise la rapidité avec laquelle la charge du condensateur et l'intensité reviennent à zéro.

3.2.3 Etude énergétique

L'équation différentielle précédente $Ri(t) + \frac{q(t)}{C} = 0$ permet d'écrire :

$$Ri(t)^2 dt + \frac{q(t)}{C} dq(t) = 0$$

$\longrightarrow Ri(t)^2 dt$ = l'énergie dissipée par effet Joule pendant dt.
$\longrightarrow \frac{q(t)}{C} dq(t) = d(\frac{1}{2}\frac{q(t)^2}{C})$ = variation (ici négative) de l'énergie électrostatique stockée dans le conducteur pendant dt. L'énergie électrostatique stockée dans le condensateur est totalement dissipée par effet Joule dans le conducteur ohmique.

4 Circuit R,L en série

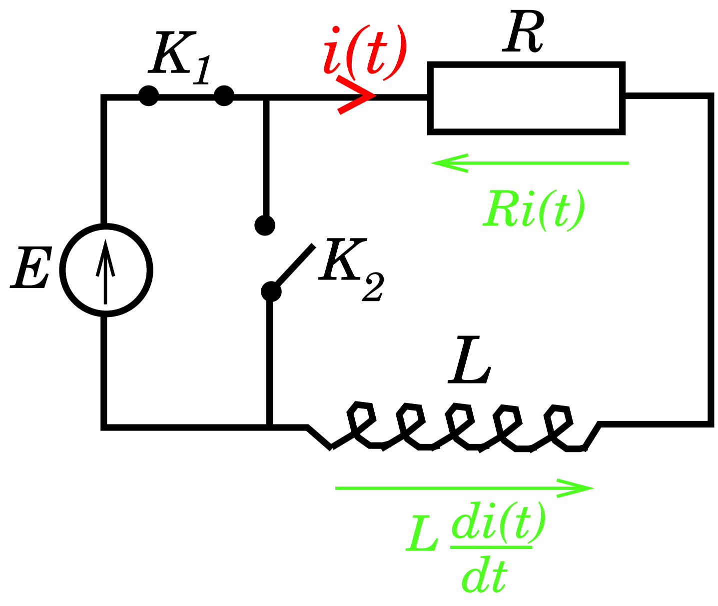
4.1 Etablissement du courant

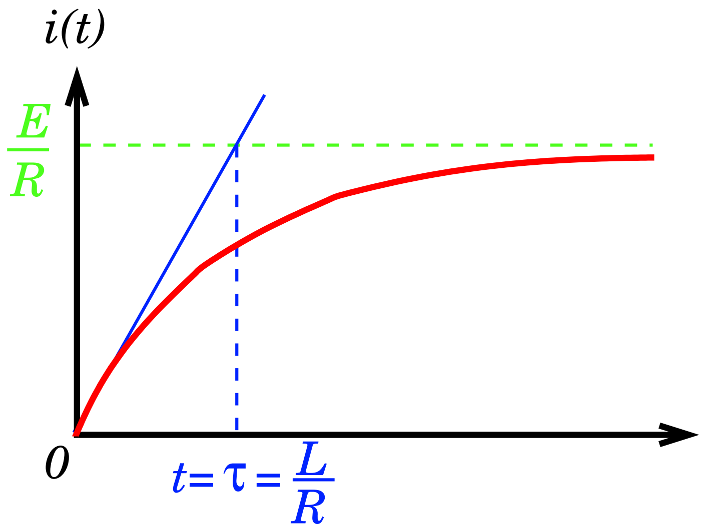
4.1.1 Evolution de l'intensité du courant en fonction de t

$$\boxed{L\frac{di(t)}{dt} + Ri(t) = E}$$

Solution générale de la forme :
$i(t) = \frac{E}{R} + \lambda e^{-\frac{R}{L}t}$
A $t = 0$ $i(t = 0) = 0$ car en régime variable la bobine s'oppose à l'établissement du courant dans le circuit. $\Longrightarrow \lambda = -\frac{E}{R}$

$$\boxed{i(t) = \frac{E}{R}(1 - e^{-\frac{R}{L}t})}$$





L'intensité du courant augmente exponentiellement avec le temps.Au bout d'une durée théoriquement infinie, elle atteint la valeur constante $I = \frac{E}{R}$: c'est le régime permanent.

En régime permanent, seul le conducteur ohmique influe sur la valeur de l'intensité : une bobine se comporte comme un fil.

4.1.2 Constante de temps du circuit

$$\boxed{i(t) = \frac{E}{R}(1 - e^{-\frac{t}{\tau}})}$$

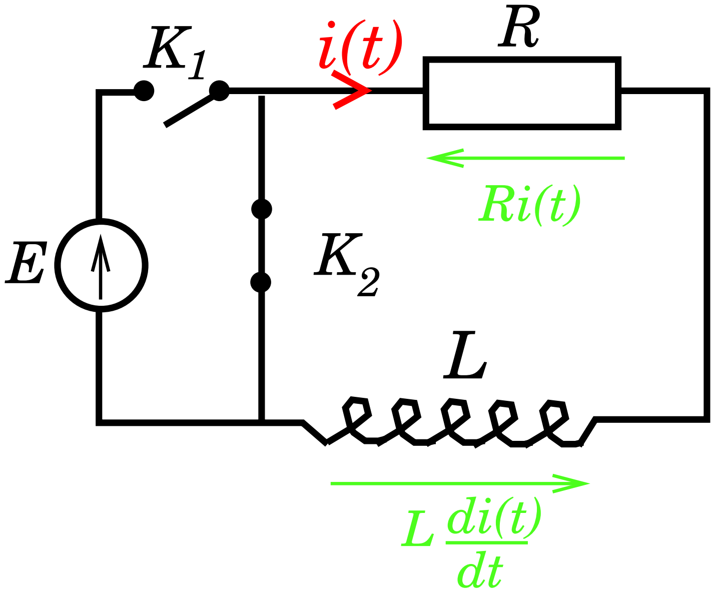
4.1.3 Etude énergétique

$$Li(t)di(t) + Ri(t)^2dt = Ei(t)dt$$

$\longrightarrow Li(t)di(t) = d(\frac{1}{2}Li(t)^2)$ = l'énergie magnétique infinitésimale emmagasinée pendant la durée dt.
$\longrightarrow Ri(t)^2dt$ = l'énergie dissipée par effet Joule pendant dt.
$\longrightarrow Ei(t)dt$ = l'énergie fournie par le générateur pendant dt.
L'énergie fournie par le générateur est en partie emmagasinée dans la bobine et en partie dissipée par effet Joule dans le conducteur ohmique.
En régime permanent $i(t) = I = \frac{E}{R}$=constante donc $di(t) = 0$. L'énergie magnétique emmagasinée dans la bobine ne varie plus et la totalité de l'énergie fournie par le générateur est dissipée par effet Joule.

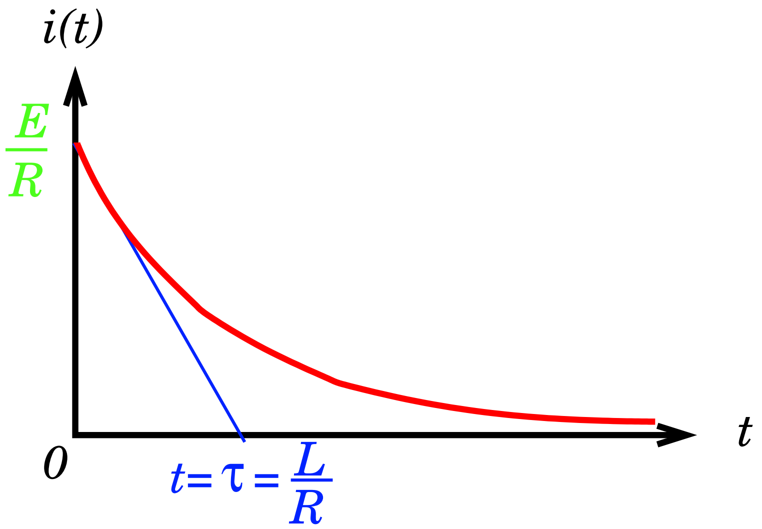
4.2 Arrêt du courant

$$\boxed{L\frac{di(t)}{dt} + Ri(t) = 0}$$



Solution générale de la forme :
$i(t) = \lambda e^{-\frac{R}{L}t}$
A $t = 0$ $i(t = 0) = \frac{E}{R} \Longrightarrow \lambda = \frac{E}{R}$

$$\boxed{i(t) = \frac{E}{R}e^{-\frac{R}{L}t}}$$



4.2.1 Constante de temps du circuit

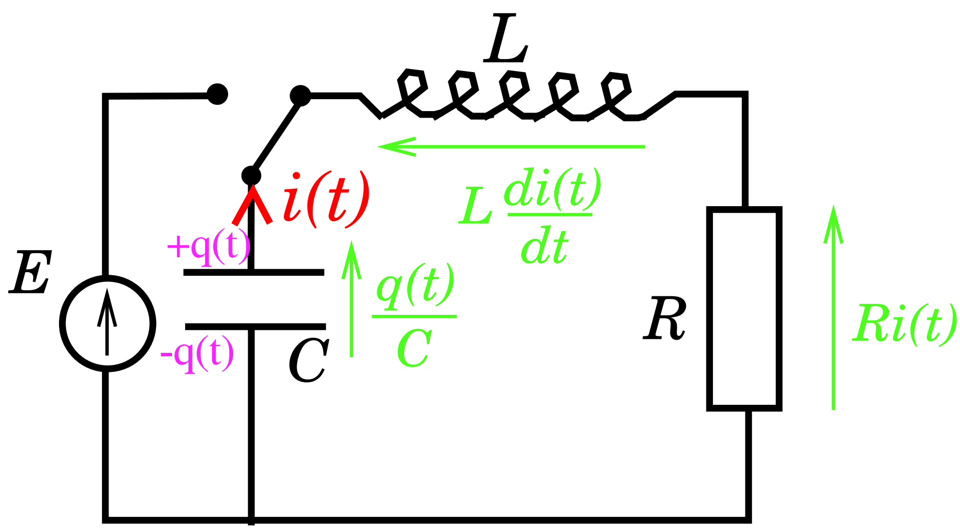
$$\boxed{i(t) = \frac{E}{R}e^{-\frac{t}{\tau}}}$$

4.2.2 Etude énergétique

$$-Li(t)di(t) = Ri(t)^2dt$$

$\longrightarrow -Li(t)di(t) = -d(\frac{1}{2}Li(t)^2)$ = diminution d'énergie magnétique emmagasinée pendant la durée dt.
$\longrightarrow Ri(t)^2dt$ = l'énergie dissipée par effet Joule pendant dt.
Ainsi l'énergie magnétique emmagasinée dans la bobine est dissipée par effet Joule dans le conducteur ohmique.

5 Circuit R,L,C en série



Avec les orientations choisies : $i(t) = -\frac{dq(t)}{dt}$.
Par application de la loi des mailles on obtient :

$$\frac{q(t)}{C} - L\frac{di(t)}{dt} - Ri(t) = 0$$

Equation différentielle : $\boxed{L\frac{d^2q(t)}{dt^2} + R\frac{dq(t)}{dt} + \frac{q(t)}{C} = 0}$

Une telle équation différentielle du deuxième ordre, homogène, admet pour équation caractéristique : $Lr^2 + Rr + \frac{1}{C}$, équation du second degré en r dont le discriminant est :

$$\Delta = R^2 - 4\frac{L}{C}$$

Suivant le signe du discriminant, la solution correspond à différents modes d'évolution de la charge du condensateur et de l'intensité du courant appelés régimes propres.

5.1 Régime apériodique ($\Delta > 0$)

$\Delta = R^2 - 4\frac{L}{C} > 0 \Rightarrow$ L'équation caractéristique admet deux racines r_1 et r_2 réelles, distinctes et négatives qui sont :

$$r_{1,2} = -\frac{R}{2L} \pm \sqrt{\frac{R^2}{4L^2} - \frac{1}{LC}}$$

Solution générale de l'équation différentielle est de la forme :

$$q(t) = Ae^{r_1 t} + Be^{r_2 t}$$

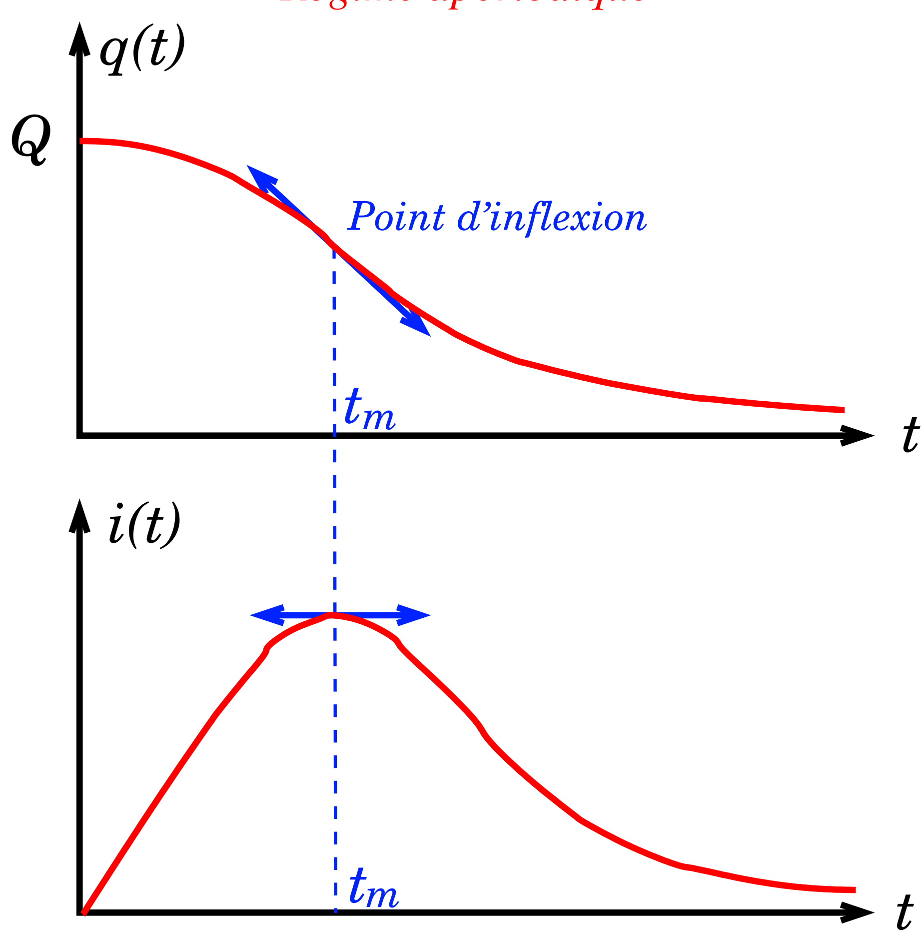
A et B sont deux constantes à déterminer à partir des conditions initiales.
A l'instant t=0 :
$\longrightarrow q(t=0) = Q$ continuité de la charge du condensateur.
$\longrightarrow i(t=0) = 0$ continuité de l'intensité parcourant une bobine.
$q(t=0) = Q = A + B$
$i(t=0) = 0 = -\frac{dq}{dt}|_{t=0} = -r_1 Ae^{r_1 t} - r_2 Be^{r_2 t} = -r_1 A - r_2 B$

On en déduit : $\quad A = \dfrac{Qr_2}{r_1 - r_2} \quad$ et $\quad B = \dfrac{Qr_1}{r_1 - r_2}$

$$\boxed{q(t) = \frac{Q}{r_1 - r_2}(r_1 e^{r_2 t} - r_2 e^{r_1 t})}$$

$$\boxed{i(t) = -\frac{Qr_1 r_2}{r_1 - r_2}(e^{r_2 t} - e^{r_1 t})}$$

Régime apériodique



5.2 Régime critique ($\Delta = 0$)

$\Delta = R^2 - 4\frac{L}{C} = 0 \Rightarrow$ L'équation caractéristique admet une racine double négative :

$$r = -\frac{R}{2L} = -\frac{2}{RC}$$

La solution de l'équation différentielle est de la forme :

$$q(t) = (A + Bt)e^{rt}$$

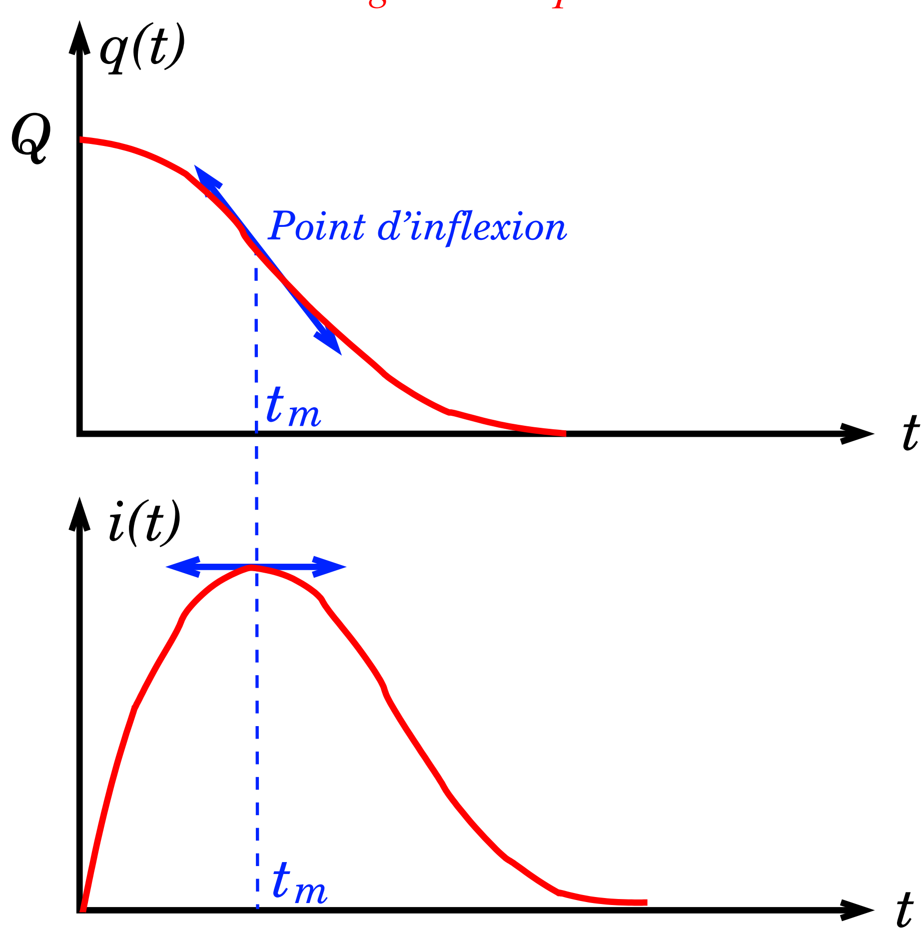
On en déduit l'expression de l'intensité :

$$i(t) = -\frac{dq(t)}{dt} = -Be^{rt} - (A + Bt)e^{rt}$$

Avec comme conditions initiales : $q(t = 0) = Q$ et $i(t = 0) = 0$.
On obtient : $A = Q$ et $B = -rQ$.

$$\boxed{q(t) = Q(1 - rt)e^{rt}} \qquad \boxed{i(t) = Qr^2te^{rt}}$$

Régime critique



5.3 Régime oscillatoire amorti ($\Delta < 0$) (ou régime pseudo-pérodique)

$\Delta = R^2 - 4\frac{L}{C} < 0 \Rightarrow$ L'équation caractéristique admet deux racines complexes conjuguées qui sont :

$$r_{1,2} = -\frac{R}{2L} \pm i\frac{\sqrt{-\Delta}}{2L} = -\frac{R}{2L} \pm i\sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}}$$

Solution générale de l'équation différentielle est de la forme :

$$q(t) = e^{-\frac{R}{2L}t}[Ae^{i\sqrt{\frac{1}{LC}-\frac{R^2}{4L^2}}t} + Be^{-i\sqrt{\frac{1}{LC}-\frac{R^2}{4L^2}}t}]$$

Afin d'alléger l'écriture on pose usuellement :

$$\lambda = \frac{R}{2L} \quad \omega_0^2 = \frac{1}{LC} \quad \text{et} \quad \omega^2 = \omega_0^2 - \lambda^2 = \frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}$$

Ainsi : $\quad q(t) = e^{-\lambda t}[Ae^{i\omega t} + Be^{-i\omega t}]$

Ou d'une autre façon : $\quad q(t) = e^{-\lambda t}[A'cos(\omega t) + B'sin(\omega t)]$

On déduit , par dérivation, en tenant compte des orientations arbitraires dans le circuit : $i(t) = -\frac{dq(t)}{dt}$

$$i(t) = -e^{-\lambda t}[-\omega A'sin(\omega t)+\omega B'cos(\omega t)]+\lambda e^{-\lambda t}[A'cos(\omega t)+B'sin(\omega t)]$$

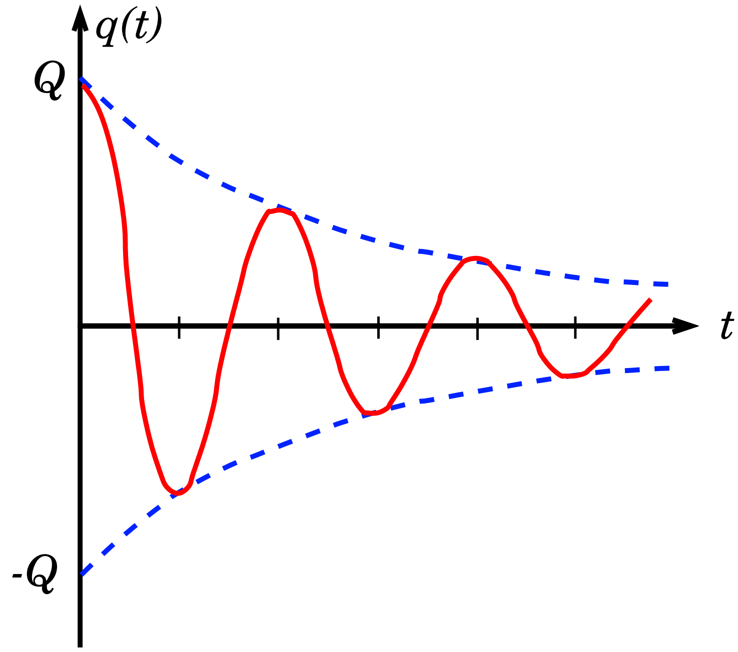
L'utilisation des même conditions initiales que précédemment ($q(t=0) = Q$ et $i(t=0) = 0$) permet de déduire :

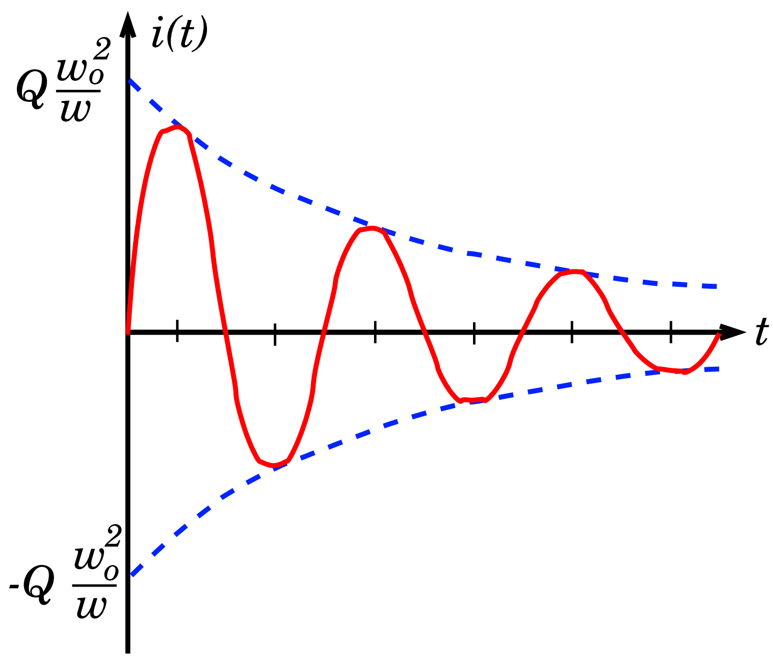
$$A' = Q \quad \text{et} \quad B' = \frac{\lambda}{\omega}Q$$

$$\boxed{q(t) = Qe^{-\lambda t}[cos(\omega t) + \frac{\lambda}{\omega}sin(\omega t)]}$$

$$\boxed{i(t) = e^{-\lambda t}Q\frac{\omega_0^2}{\omega}sin(\omega t)}$$

Régime sinusoidal amorti





5.3.1 Etude énergétique

$$\frac{q(t)}{C}dq(t) + Li(t)di(t) = -Ri(t)^2dt$$

$\longrightarrow Ri(t)^2dt$ = l'énergie dissipée par effet Joule pendant dt.

$\longrightarrow \frac{q(t)}{C}dq(t) + Li(t)di(t) = d[\frac{1}{2}\frac{q(t)^2}{C} + \frac{1}{2}Li(t)^2]$ =la variation des énergie électrostatique et magnétique dans le condensateur et la bobine. Cette variation est négative, il y a diminution de l'énergie totale emmagasinée.