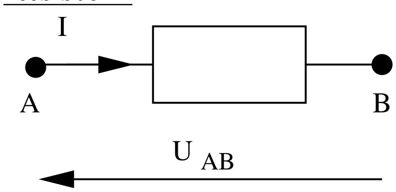
Chapitre III : Circuits linéaires en régime continu permanent

1 Loi d'Ohm pour un dipôle linéaire

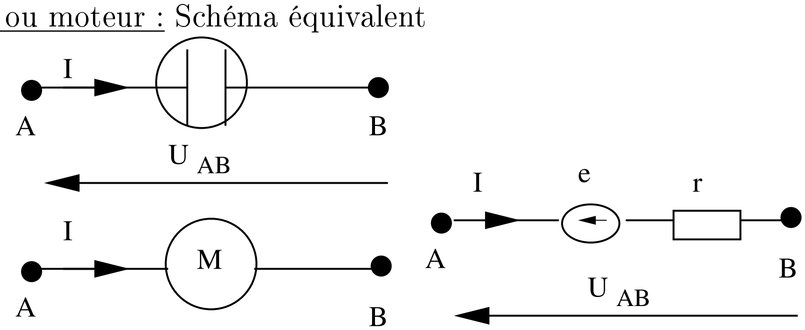
— Résistor :



$\Longrightarrow U = R \cdot I$ et $I = G \cdot U$

Puissance absorbée $P_a = U \cdot I = RI^2 = GU^2$ Où R est la résistance et $G = \frac{1}{R}$ la conductance

— Voltamètre ou moteur : Schéma équivalent

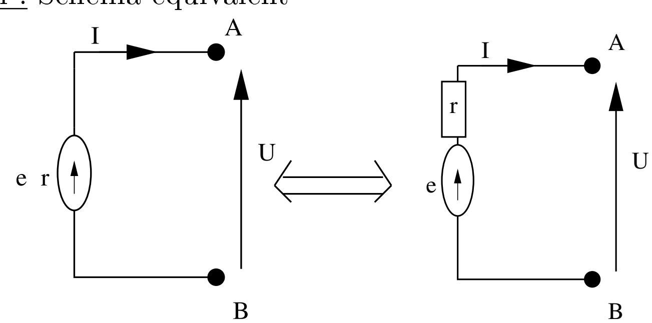


$\Longrightarrow U = e + r \cdot I$

Puissance absorbée $P_a = eI + rI^2 = UI$

N.B. Le sens du courant ne peut être inversé. ($I > 0$)

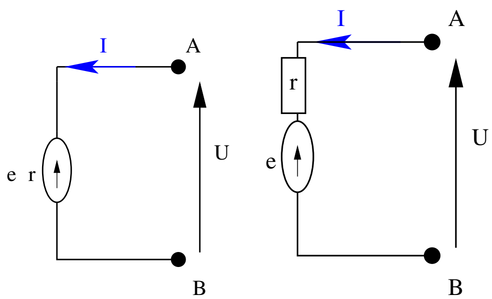
— Source de tension : Schéma équivalent



$\Longrightarrow U = e - r \cdot I$

$\Longrightarrow$ Puissance délivrée : $eI = UI + rI^2$

N.B. Il est possible de monter la source de tension en opposition telle :

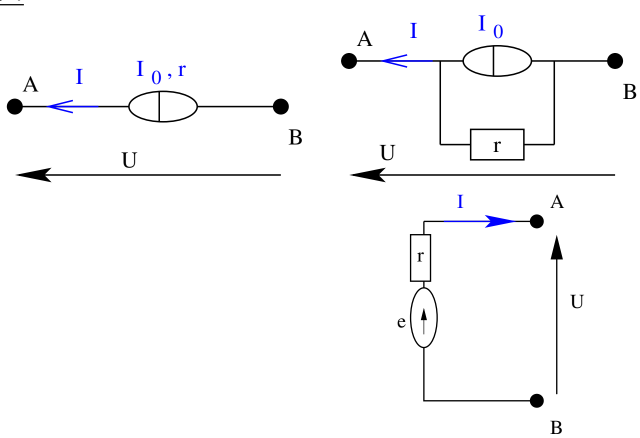


$\Longrightarrow U = e + r \cdot I$

Puissance utile $P_u = eI + rI^2 = UI$

La source de tension fonctionne alors en mode récepteur.

— Source de courant :



$\Longrightarrow I = I_0 - \frac{U}{r} = I_0 - GU$

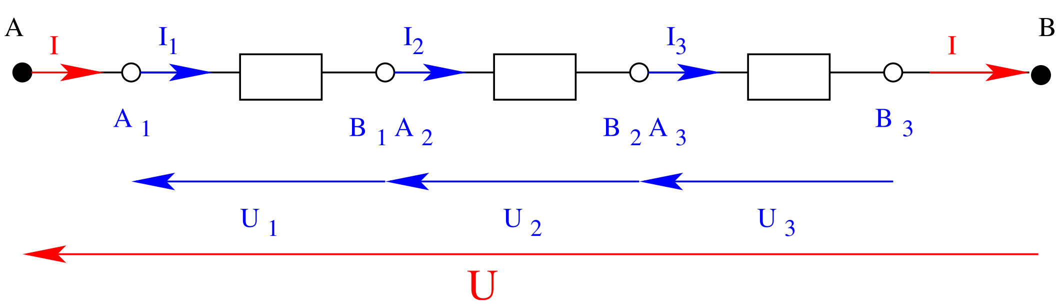
$\Longrightarrow U = rI_0 - rI = e - rI$

Puissance Délivrée :

$$UI = UI_0 - GU^2 \quad UI = eI - rI^2$$

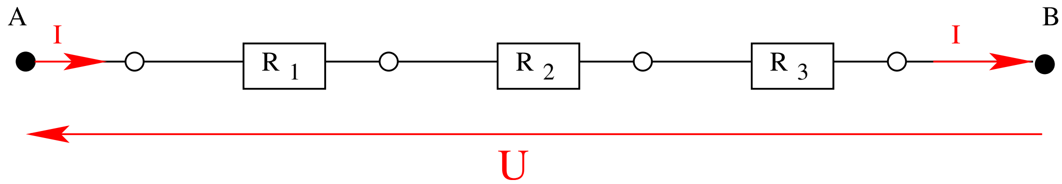
2 Association de dipôles linéaire

2.1 Association en série



$$U = V_A - V_B$$
$$U = V_{A_1} - V_{B_1} + V_{A_2} - V_{B_2} + V_{A_3} - V_{B_3}$$
$$U = U_1 + U_2 + U_3$$
$$I = I_1 = I_2 = I_3$$

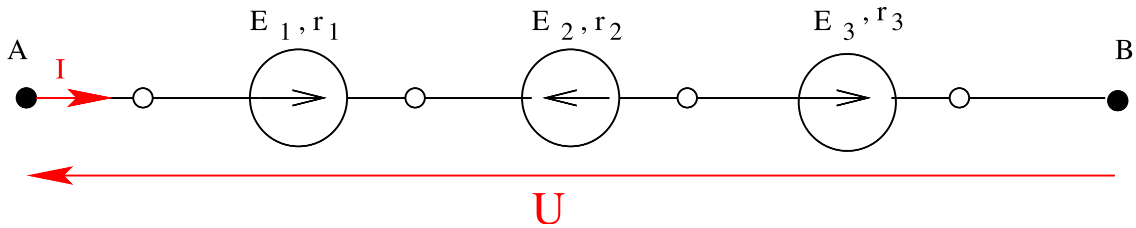
— Cas des résistors :

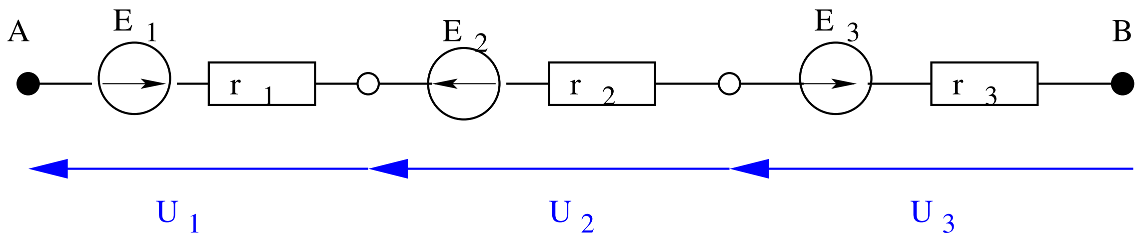


$U = R_1 I + R_2 I + R_3 I = (R_1 + R_2 + R_3) I$
$U = RI$

$$\boxed{R = \sum_k R_k}$$

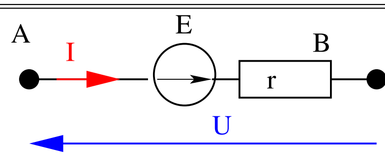
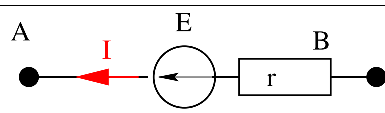
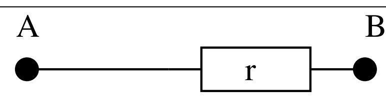
— <u>Cas des sources de tension :</u>





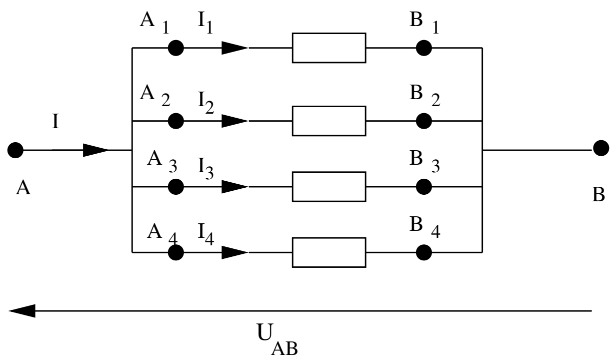
$U_1 = -E_1 + r_1 I \quad U_2 = +E_2 + r_2 I \quad U_3 = -E_3 + r_3 I$
$U = -E + RI$
$U = -(E_1 - E_2 \quad +E_3) + (r_1 + r_2 \quad +r_3) I$

$$\boxed{E = E_1 - E_2 + E_3 \quad , \quad R = r_1 + r_2 + r_3}$$

si $E > 0$		et$E_1 + E_3 > E_2$
si $E < 0$		et$E_1 + E_3 < E_2$
si $E = 0$		et$E_1 + E_3 = E_2$

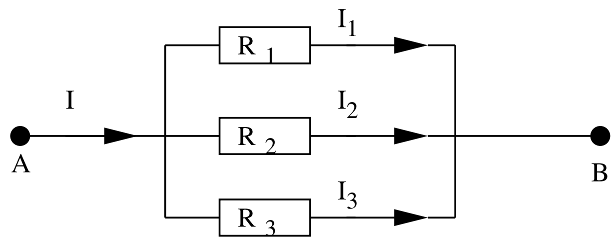
2.2 Association en parallèle

$$U_{AB} = V_A - V_B$$
$$U_{AB} = V_{A_k} - V_{B_k} \quad \forall k$$



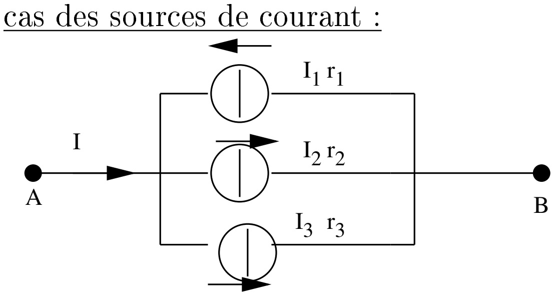
$$I = \sum_k I_k$$

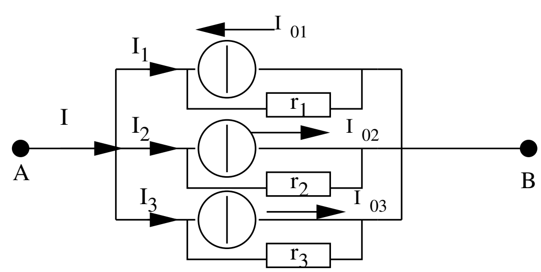
— <u>cas de Résistors :</u>



$$\begin{array}{lll} I_1 = G_1 U_1 & & \\ I_2 = G_2 U_2 & G_k = \frac{1}{R_k} & \\ I_3 = G_3 U_3 & & \\ I = I_1 + I_2 + I_3 & = (G_1 + G_2 + G_3)U = GU & \boxed{\Longrightarrow \frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}} \\ \Longrightarrow & G = \sum_k G_k & \end{array}$$

— <u>cas des sources de courant :</u>

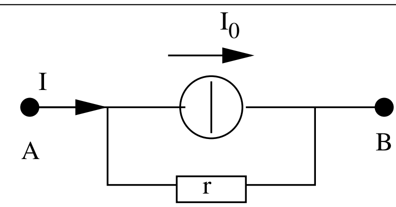
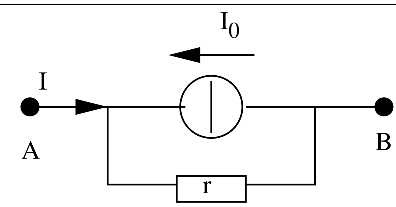
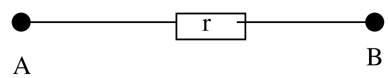




$$\begin{array}{ll} \text{Par définition :} & I_1 = g_1 U_1 - I_{01} \\ & I_2 = g_2 U_2 + I_{02} \\ & I_3 = g_3 U_3 + I_{03} \\ \text{où } U_1 = U_2 = U_3 & = U_{AB} \end{array}$$

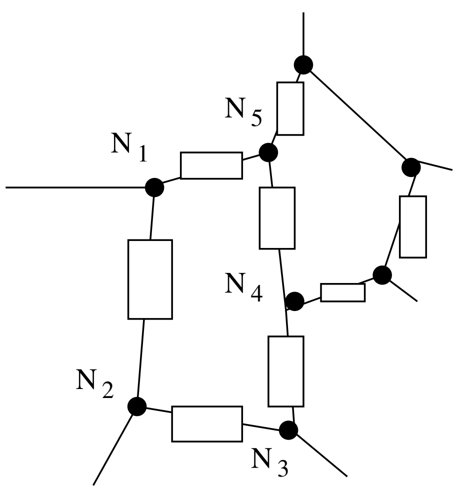
$$I = \sum_{k=1}^{k=3} I_k = I_{02} + I_{03} - I_{01} + (g_1 + g_2 + g_3)U$$

$$I = I_0 + gU$$

si $I_0 > 0 \Longrightarrow$		$r = \frac{1}{g} = \frac{1}{\sum_{k=1}^{k=3} g_k}$ où $g_k = \frac{1}{r_k}$
si $I_0 < 0 \Longrightarrow$		
si $I_0 = 0 \Longrightarrow$		

3 Théorêmes généraux

3.1 Définitions



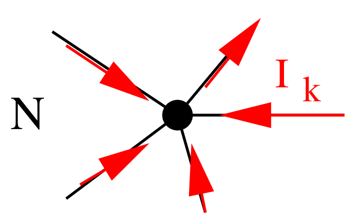
Soit un <u>réseau linéaire</u>.

On appelle <u>réseau</u> un ensemble de <u>mailles</u>.

<u>Maille :</u>	circuit fermé constitué de <u>branches</u>
<u>Branche :</u>	constitue un dipole.

3.2 Lois de Kirshoff

1. <u>Loi des noeuds</u>



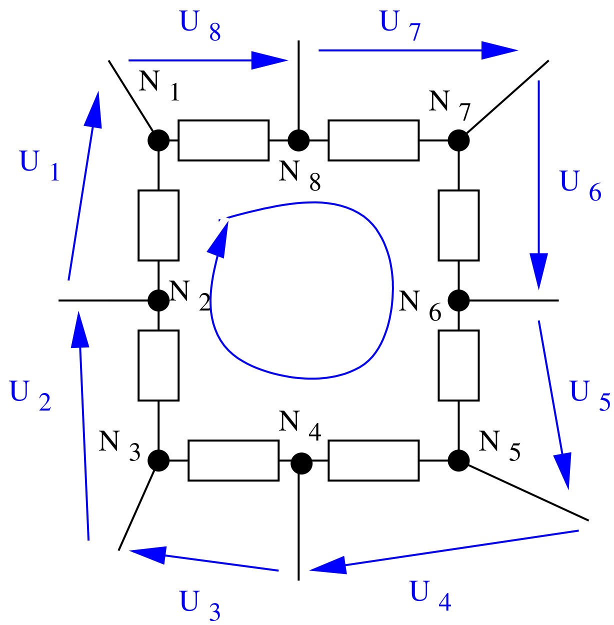
$\boxed{\sum_k I_k = 0}$

Soit un noeud N commun à n branches.
$I_k \Longrightarrow$ intensité algébrique du courant dans la branche k.
Convention :

$$\begin{array}{lcl} I_k & \Longrightarrow & \oplus \text{ si courant entrant} \\ I_k & \Longrightarrow & \ominus \text{ si courant sortant} \end{array}$$

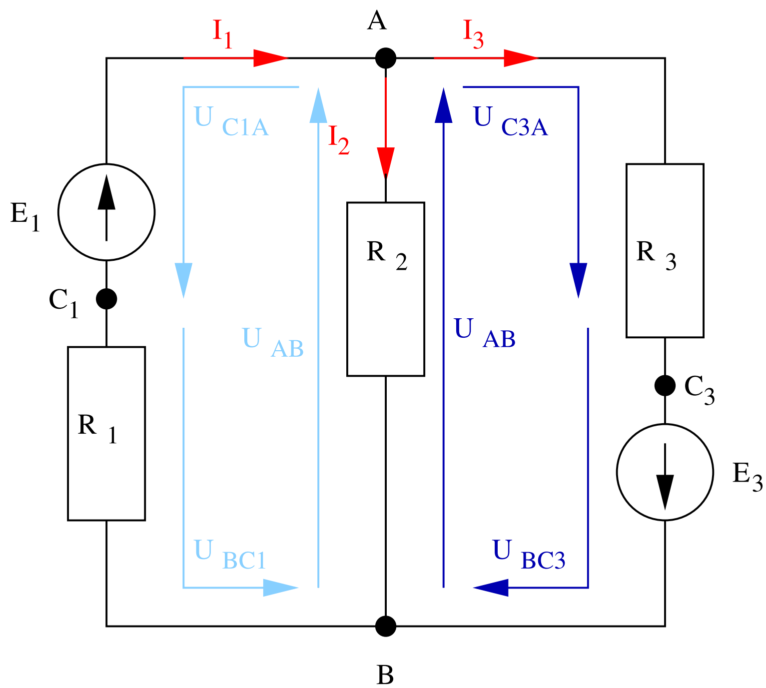
Ce qui signifie qu'aucune charge ne s'accumule en un noeud!!!

2. Loi des Mailles



$\boxed{\sum_k U_k = 0}$

3. Application :
Déterminer les courants dans le Circuit1 suivant :



le sens des courants est choisi

— loi des noeuds :

$$\left.\begin{array}{ll} \text{en A :} & I_1 - I_2 - I_3 = 0 \\ \text{en B :} & -I_1 + I_2 + I_3 = 0 \end{array}\right. \quad \text{(A)\& (B) identiques.}$$

— loi des mailles :

· Maille ABC_1A :

$$V_A - V_B + V_B - V_{C_1} + V_{C_1} - V_A = 0$$
$$R_2I_2 + R_1I_1 - E_1 = 0$$

· Maille ABC_3A :

$$V_A - V_B + V_B - V_{C_3} + V_{C_3} - V_A = 0$$
$$R_2I_2 + E_3 - R_3I_3 = 0$$

— Il faut donc résoudre le système de 3 équations à 3 inconnues suivant ;

$$I_1 - I_2 - I_3 = 0$$
$$R_2I_2 + R_1I_1 - E_1 = 0$$
$$R_2I_2 + E_3 - R_3I_3 = 0$$

$\Longrightarrow$ par substitution $I_2 = I_1 - I_3$

$$E_1 - I_1(R_2 + R_1) + R_2I_3 = 0 \quad \text{(A)}$$
$$E_3 + I_1R_2 - I_3(R_2 + R_3) = 0 \quad \text{(B)}$$

une méthode de résolution est :

$$\begin{array}{l|l}
\text{(A)}\times(R_2) & E_1R_2 - I_1(R_2+R_1)R_2 + (R_2)^2I_3 = 0 \\
+ & \\
\text{(B)}\times(R_2+R_1) & E_3(R_2+R_1) + I_1R_2(R_2+R_1) - I_3(R_2+R_3)(R_2+R_1) = 0 \\
\hline
= & E_1R_2 + E_3(R_2+R_1) - I_3(R_1R_3 + R_2(R_3+R_1)) = 0
\end{array}$$

On en déduit facilement :

$$\boxed{\begin{array}{l}
I_1 = \frac{(R_2+R_3)E_1+R_2E_3}{R_1R_2+R_1R_3+R_2R_3} \\[2ex]
I_2 = I_1 - I_3 = \frac{R_3E_1-R_1E_3}{R_1R_2+R_1R_3+R_2R_3} \\[2ex]
I_3 = \frac{R_2E_1+(R_1+R_2)E_3}{R_1R_2+R_1R_3+R_2R_3}
\end{array}}$$

— Conclusion :

les intensités I_1 et I_3 sont positives cad que le sens à priori choisi est correct.

Le courant dans la branche AB (I_2) dépend de la différence $I_1 - I_3$:

si $R_3E_1 > R_1E_3$	$I_2 > 0$	sens de I_2 A $\Longrightarrow$ B
si $R_3E_1 < R_1E_3$	$I_2 < 0$	sens de I_2 B $\Longrightarrow$ A

— Application Numérique :

$$E_1 = 10\text{V} \quad E_3 = 5\text{V} \quad R_1 = R_3 = 10\ \Omega$$
$$R_2 = 5\ \Omega$$

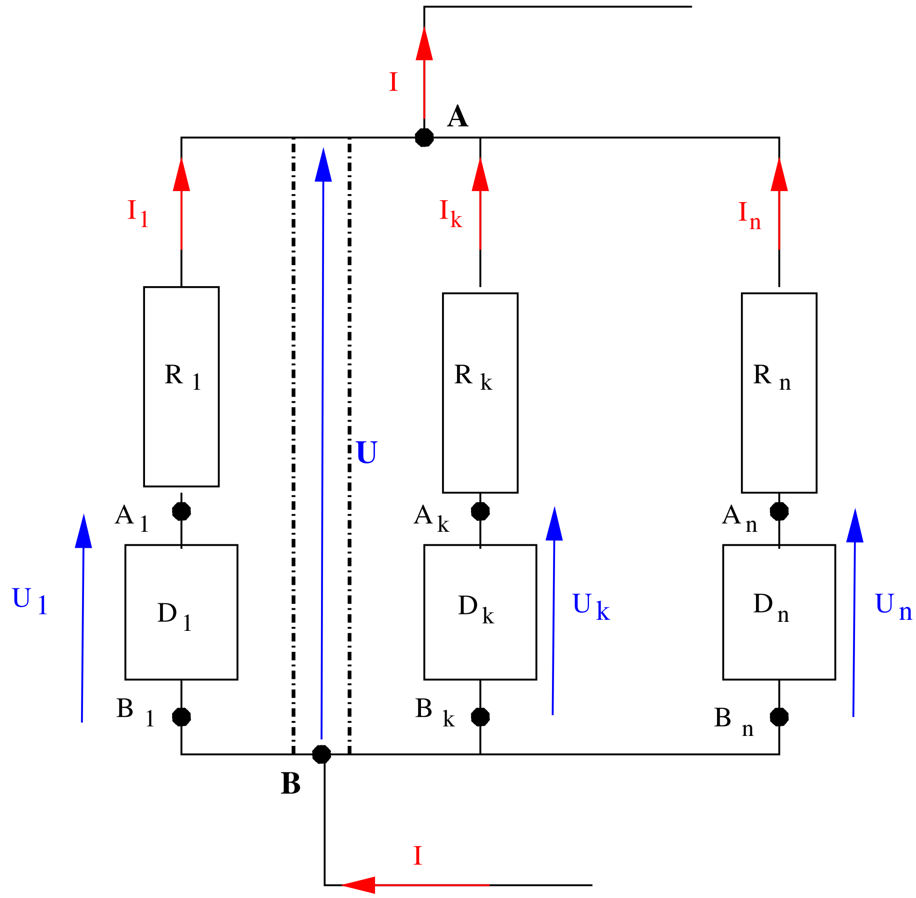
Solution

$$I_1 = \frac{150+25}{100+100} = \frac{175}{200} = 0{,}875 \text{ A}$$
$$I_2 = \frac{100-50}{100+100} = \frac{50}{200} = 0{,}250 \text{ A}$$
$$I_3 = \frac{50+75}{100+100} = \frac{125}{200} = 0{,}625 \text{ A}$$

On vérifie que $I_1 = I_2 + I_3$ cad le sens des courants inscrit sur le schéma

3.3 Théorème de Millmann

— Soient n branches ayant en commun A et B .
  — un résistor -un dipôle A_kB_k tel que :
  $U_k = V_{A_k} - V_{B_k} = U_{A_kB_k}$.



Le théorême de Millmann est une application de la loi des noeuds généralisée.
$\Longrightarrow$ Loi des noeuds en A :

$$\sum_{k=1}^{n} I_k - I = 0$$

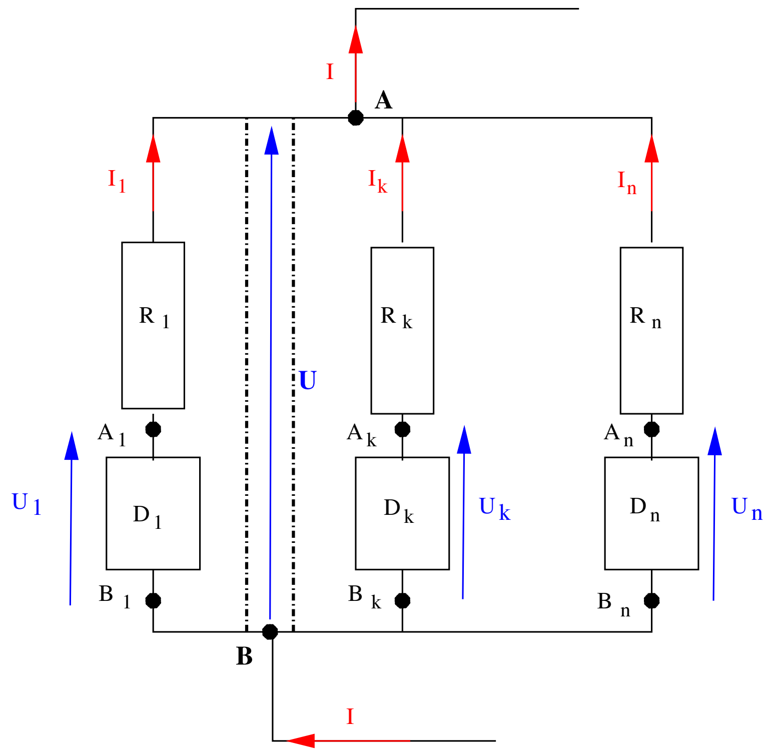
or $\quad U_{AA_k} = V_A - V_{A_k} = -R_kI_k$

$\quad I_k = \frac{1}{R_k}(V_{A_k} - V_A) = G_k(V_{A_k} - V_A)$

et $\quad V_{A_k} = U_k + V_{B_k} = U_k + V_B$

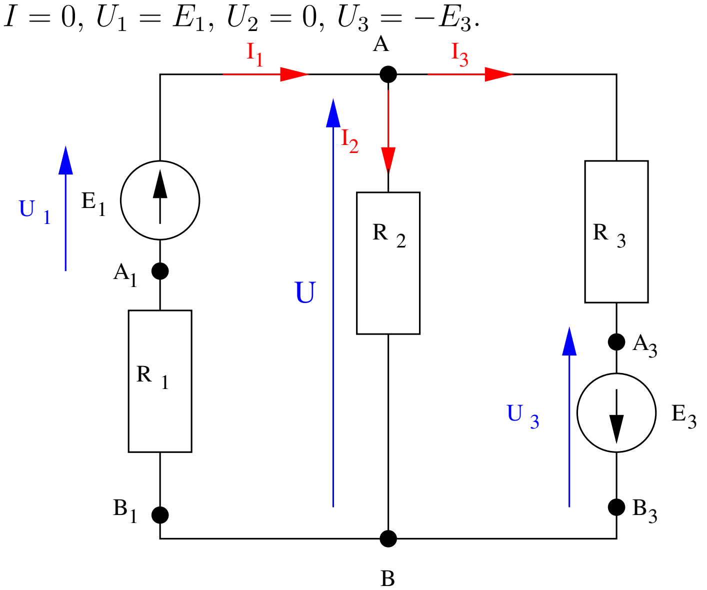
d'où $\quad \sum_k G_k(U_k + V_B - V_A) - I = 0$

Soit $\quad \left(\sum_k G_kU_k\right) - I = \left(\sum_k G_k\right)U$



$$U = \frac{\left(\sum_k G_k U_k\right) - I}{\sum_k G_k}$$

— Applications :
Circuit 1 : Reprenons le circuit précédemment étudié et appliquons le résultat de Millmann avec :
$I = 0$, $U_1 = E_1$, $U_2 = 0$, $U_3 = -E_3$.



$$U = \frac{G_1E_1 - G_3E_3}{G_1+G_2+G_3}$$

On en déduit tout de suite que :

$$I_2 = G_2U = G_2\frac{G_1E_1 - G_3E_3}{G_1 + G_2 + G_3}$$

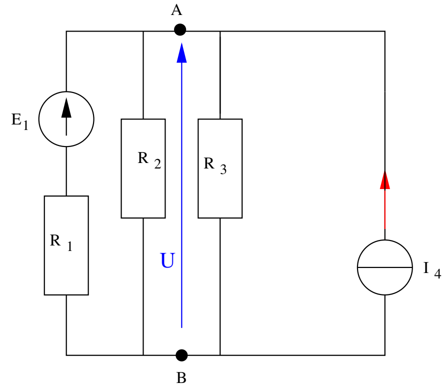
$$I_2 = \frac{1}{R_2} \quad \frac{\frac{E_1}{R_1} - \frac{E_3}{R_3}}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}} = \frac{R_3E_1 - R_1E_3}{R_1R_2 + R_1R_3 + R_2R_3}$$

Puis à partir de

$$U = E_1 - R_1I_1 = R_3I_3 + E_3$$

on détermine I_1 et I_3.

Circuit 2 : Déterminer U dans le circuit suivant :

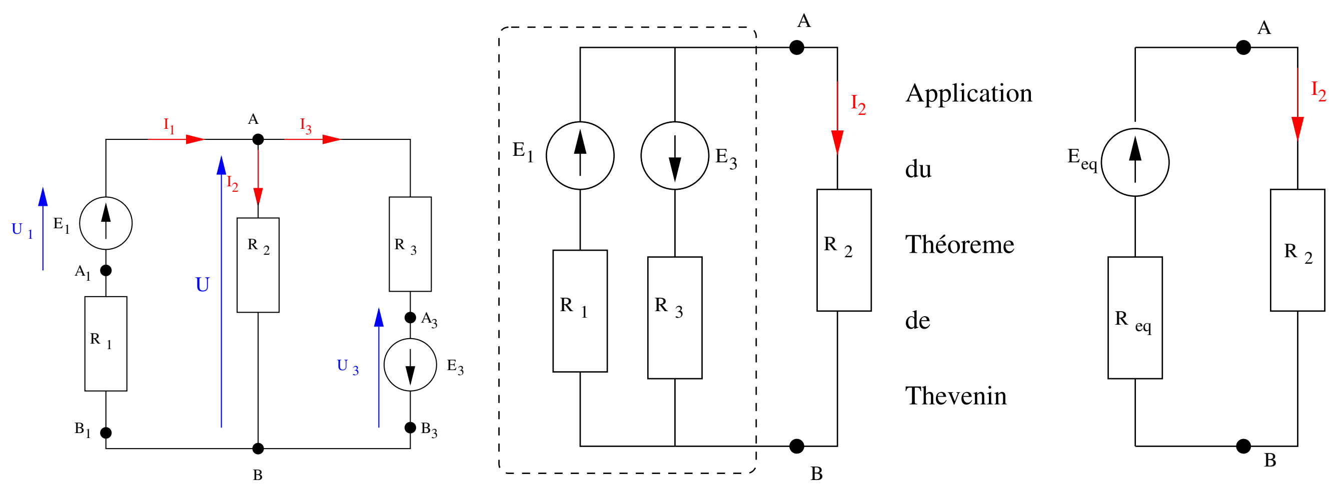


$$U = \frac{\sum_k G_k U_k - I}{\sum_k G_k} = \frac{G_1 E_1 + I_4}{G_1 + G_2 + G_3}$$

3.4 Théorème de Thévenin

— Ennoncé : Toute partie de réseau comprise entre 2 noeuds A et B peut être remplacée par une source de tension de f.è.m E_{eq} et de résistance interne R_{eq}.
La Partie considérée étant déconnectée du reste du réseau :
$\cdot E_{eq} = V_A - V_B = U_{AB}$
$\cdot R_{eq}$ est la résistance équivalente du circuit lorsque toutes les sources sont éteintes.

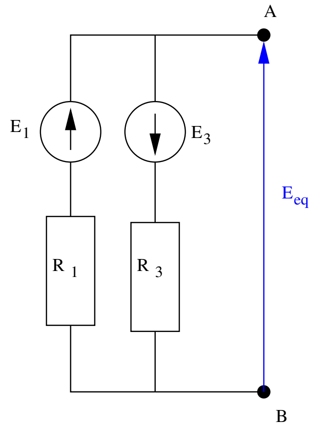
— Application n°1 : On reprend le Circuit 1



Le réseau se réduit à une seule maille !

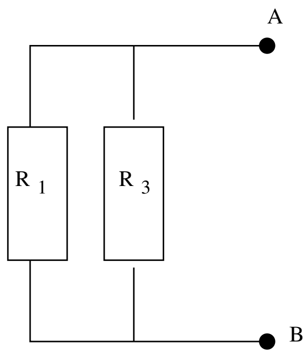
$$R_2 I_2 - E_{eq} + R_{eq} I_2 = 0 \qquad I_2 = \frac{E_{eq}}{R_2 + R_{eq}}$$

— Détermination de E_{eq} $\Longrightarrow$ théorême de Millmann :



$$E_{eq} = \frac{G_1E_1 - G_3E_3}{G_1+G_3}$$

— <u>détermination de R_{eq}</u> $\Longrightarrow R_1//R_3$



$$R_{eq} = \frac{1}{G_{eq}} = \frac{1}{G_1+G_3}$$

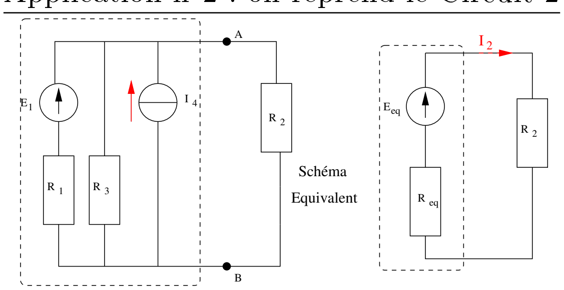
— D'où la valeur de I_2 :

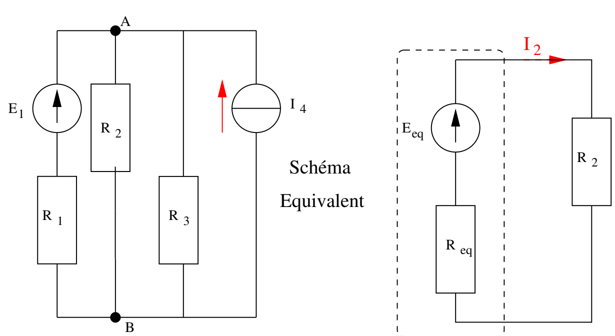
$$I_2 = \frac{G_1E_1 - G_3E_3}{(\frac{1}{G_1+G_3} + R_2)(G_1+G_3)} = \frac{G_1E_1 - G_3E_3}{1 + R_2(G_1+G_3)}$$

On retrouve le résultat déjà obtenu :

$$I_2 = \frac{1}{R_2}\frac{G_1E_1 - G_3E_3}{G_2+G_1+G_3} = \frac{R_3E_1 - R_1E_3}{R_1R_2 + R_1R_3 + R_2R_3}$$

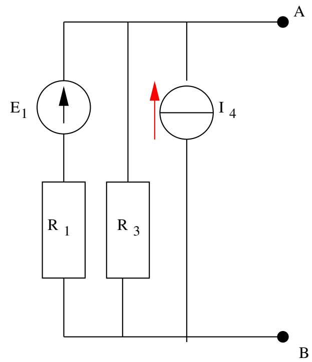
— <u>Application n°2 : on reprend le Circuit 2</u>





$$I_2 = \frac{E_{eq}}{R_2+R_{eq}}$$

— Détermination de E_{eq} $\Longrightarrow$ théorème de Millmann :



$$E_{eq} = \frac{G_1E_1+I_4}{G_1+G_3}$$

— détermination de R_{eq} $\Longrightarrow$ $(R_1//R_3)$ $R_{eq} = \frac{1}{G_{eq}} = \frac{1}{G_1+G_3}$

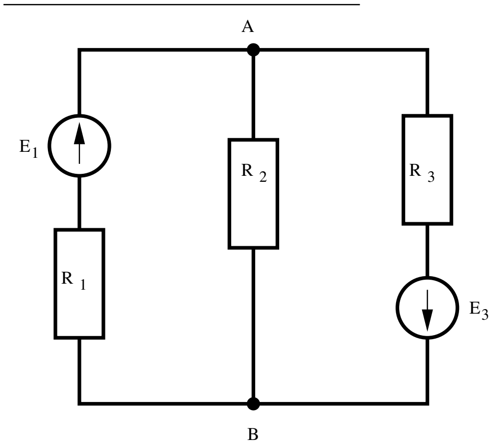
— On retrouve I_2 $\Longrightarrow$ $I_2 = \frac{G_1E_1+I_4}{(G_1+G_3)(R_2+\frac{1}{G_1+G_3})} = \frac{G_1E_1+I_4}{1+R_2(G_1+G_3)}$

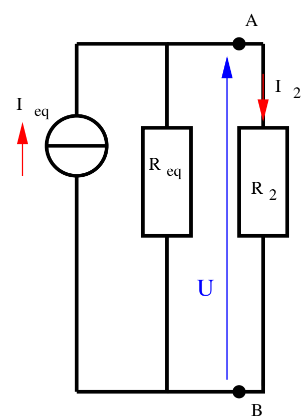
$$I_2 = \frac{G_2(G_1E_1+I_4)}{G_2+G_1+G_3}$$

3.5 Théorème de Norton

— Ennoncé : Toute partie de réseau comprise entre 2 noeuds A et B peut être remplacée par une source de courant d'intensité I_{eq} et de résistance interne R_{eq}.
La partie considérée étant déconnectée
$\cdot I_{eq}$ est l'intensité du courant traversant un fil conducteur de résistance nulle (court-circuit) reliant A et B.
$\cdot R_{eq}$ est la résistance équivalente lorsque toutes les sources sont éteintes.

— Application n°1 : circuit 1

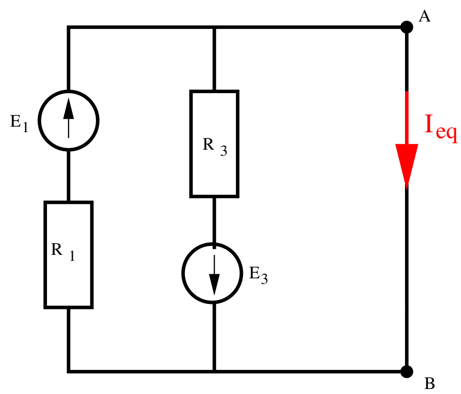




$I_2 = I_{eq} - G_{eq}U$ avec $U = R_2I_2$

$I_2(1+R_2G_{eq} = I_{eq}$ $\Longrightarrow I_2 = \frac{I_{eq}}{1+R_2G_{eq}}$

— Détermination de I_{eq} $\Longrightarrow$ Théorème de Millmann :



$U = \frac{G_1E_1 - G_3E_3 - I_eq}{G_1+G_3} = 0$

$$I_{eq} = G_1E_1 - G_3E_3$$

- Détermination de R_{eq} idem Thevenin $\Longrightarrow R_{eq} = \frac{1}{G_1+G_3}$
- d'où la valeur de I_2 :

$$I_2 = \frac{G_1E_1 - G_3E_3}{1 + R_2(G_1+G_3)} = \frac{R_3E_1 - R_1E_3}{R_1R_2 + R_1R_3 + R_2R_3}$$

— Application n°2 : circuit 2

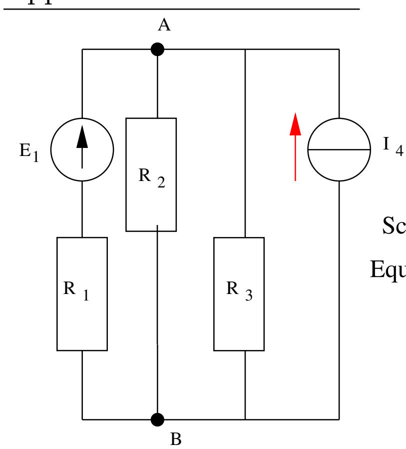
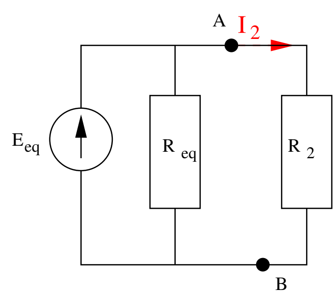
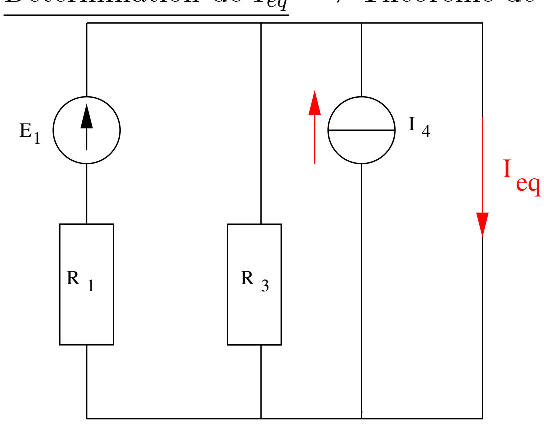


Schéma Equivalent



$I_2 = \frac{I_{eq}}{1+R_2G_{eq}}$

- Détermination de $I_{eq} \Longrightarrow$ Théorême de Millmann :

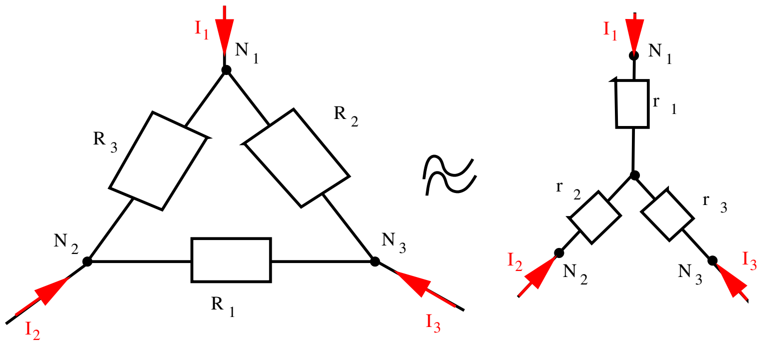


$\frac{G_1E_1+I_4-I_{eq}}{G_1+G_3} = 0 \; I_{eq} = G_1E_1 + I_4$

- Détermination de R_{eq} idem Thevenin
- On déduit I_2

$$I_2 = \frac{G_1E_1 + I_4}{1 + R_2G_{eq}} = \frac{G_2(G_1E_1 + I_4)}{G_1 + G_2 + G_3}$$

3.6 Théorème de Kenelly : équivalence étoile-triangle



L'équivalence doit être réalisée quelles que soient les intensités I_1, I_2 et I_3. En particulier on a :

si $I_3 = 0$	$I_2 = -I_1$ étoile $\Longrightarrow$ Millmann triangle $\Longrightarrow$	$V_{N_1} - V_{N_2} = \frac{R_3(R_1+R_2)}{R_1+R_2+R_3} I_1$ $V_{N_1} - V_{N_2} = (r_1 + r_2) I_1$

Donc on a

$$(r_1 + r_2) = \frac{R_3(R_1 + R_2)}{R_1 + R_2 + R_3} \qquad (A)$$

de même on a :

pour $I_2 = 0$	$I_3 = -I_1$ étoile $\Longrightarrow$ Millmann triangle $\Longrightarrow$	$V_{N_1} - V_{N_3} = \frac{R_2(R_1+R_3)}{R_1+R_2+R_3} I_1$ $V_{N_1} - V_{N_3} = (r_1 + r_3) I_1$

Donc on a

$$(r_1 + r_3) = \frac{R_2(R_1 + R_3)}{R_1 + R_2 + R_3} \qquad (B)$$

pour $I_1 = 0$	$I_3 = -I_2$ étoile $\Longrightarrow$ Millmann triangle $\Longrightarrow$	$V_{N_2} - V_{N_3} = \frac{R_1(R_2+R_3)}{R_1+R_2+R_3} I_2$ $V_{N_2} - V_{N_3} = (r_2 + r_3) I_2$

Donc on a

$$(r_2 + r_3) = \frac{R_1(R_2 + R_3)}{R_1 + R_2 + R_3} \qquad (C)$$

3 équations 3 inconnues!!!
$(A) + (B) - (C) = 2r_1$ On déduit alors

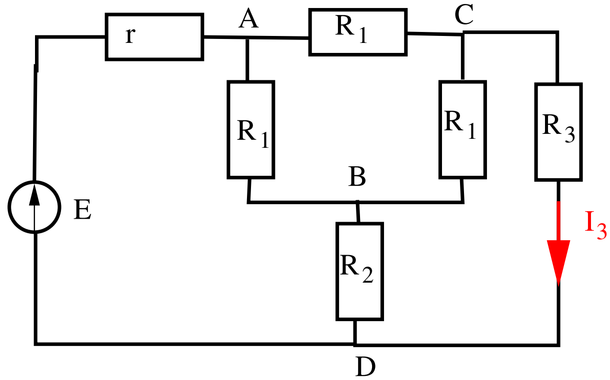
$$2r_1 = 2\frac{R_2 R_3}{R_1 + R_2 + R_3}$$

Soit en utilisant les permutations :

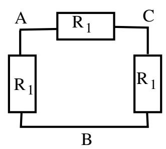
$$r_1 = \frac{R_2 R_3}{R_1 + R_2 + R_3}; \quad r_2 = \frac{R_1 R_3}{R_1 + R_2 + R_3};$$

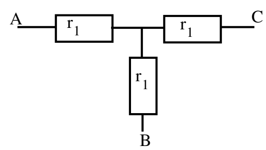
$$r_3 = \frac{R_2 R_1}{R_1 + R_2 + R_3}$$

— <u>Application</u> : Déterminer la valeur du courant I_3 dans le circuit 3 :

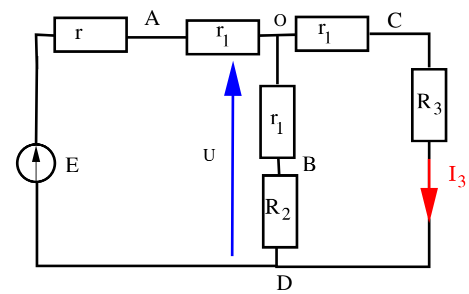


On remplace le triangle (ACB) par un schéma étoile :





avec $r_1 = \frac{R_1}{3}$ D'où le circuit :



On applique alors le théorème de Millmann pour déterminer U :

$$V_o - V_D = U = \frac{\frac{E}{r+r_1}}{\frac{1}{r+r_1} + \frac{1}{r_1+R_2} + \frac{1}{r_1+R_3}} = (r_1 + R_3) I_3$$

$$I_3 = \frac{1}{r_1 + R_3} \frac{E}{1 + \frac{r+r_1}{r_1+R_2} + \frac{r+r_1}{r_1+R_3}}$$

$$I_3 = \frac{E}{2r_1 + R_3 + r + \frac{(r+r_1)(r_1+R_3)}{r_1+R_2}}$$