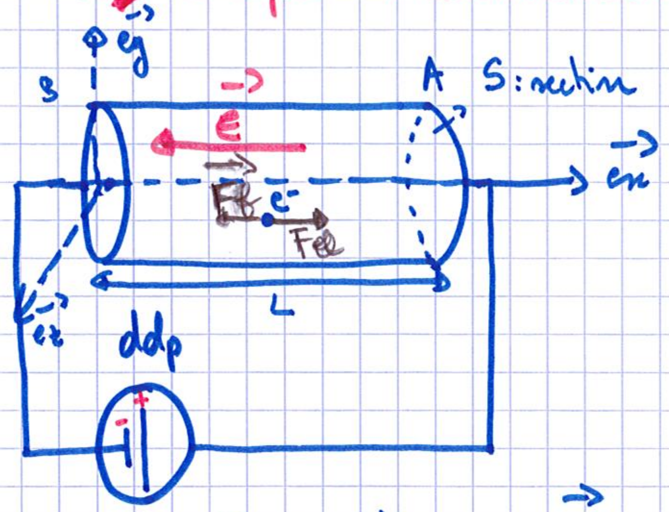
Chap 0 : Démonstrat°



Système : { conducteur métallique cylindrique de n e^- de conduct° }

S_{e^-} = { 1 e^- de conduction ds le métal }

n : densité volumique de charge

ddp = U_{AB} = différence de potentiel entre la section en A et la sect° en B du cylindre métallique de longueur L

$$\vec{E} = -\frac{ddp}{L}\vec{e_x}$$

$\vec{F_{el}} = q\vec{E} = -e\vec{E}$
$\vec{F}_{frottement} = -k\vec{v}$

le chps $\vec{E}$ ⇒ déplacement de l'e^- ds le sens $-\vec{e_x}$
le frottement ⇒ frein au déplacement ⇒ Fel et Ff sont de sens opposé.

cas d'1 seul e^- de conduct° (parmi les n) a) Position du Pbm

* à $t=0$ on applique la ddp U_{AB} 1 champ $\vec{E}$ uniforme règne ds le conducteur.
* à $t<t_0$ en moyenne aucun e^- ne s'échappe du conducteur ⇒ ($\vec{v_{e^-}} = \vec{0}$ en moy)
* à $t>t_0$ e^- soumis à $\vec{E}$ $\boxed{\vec{F_{el}} = q\vec{E}}$ $q = -e = -1{,}6\ 10^{-19}$ C

. la RFD force ⇒ accélérat° ⇒ vitesse $v_e \neq 0$ et $a_e \neq 0$

. le métal est une matière (≠ vide) ⇒ e^- en se déplaçant font des collisions e^- conduct° / matière qui se traduit par 1 freinage représenté par 1 force de frottement $\boxed{\vec{F_f} = -k\vec{v}}$

. autre force ? $\vec{P} = m\vec{g}$; $\vec{F} = q\vec{E}$

$\|\vec{P}\| = 9{,}1\ 10^{-31} \times 9{,}81 \simeq 8{,}93\ 10^{-30}$ N
$\|\vec{F}\| = +1{,}6\ 10^{-19} \times \frac{220}{22\,10^{-2}} \simeq 1{,}6\ 10^{-16}$ N $\times 10^{14}$

(si on prend 220 V et L = 22 cm)

l'effet du poids est négligeable par rapport à $\vec{F_{el}}$ $\vec{P}$: négligé.

. Relat° fondamentale de la dynamique : $\sum \vec{F_{ext}}|_{e^-} = m\vec{a_e}$

$$m\vec{a} = -e\vec{E} - k\vec{v}$$

$$\vec{a} = -\frac{e}{m}\vec{E} - \frac{k}{m}\vec{v} \qquad \text{par déf } \vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt}$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{d\vec{v}}{dt} + \frac{k}{m}\vec{v} = -\frac{e}{m}\vec{E}}$$

(I) équation vectorielle (3 équat° x, y, z)

⇒ 3 équations différentielles de la forme $f' + af = b$

(I) est projetée sur ox, oy et oz

$$\boxed{\frac{dv_x(t)}{dt} + \frac{k}{m} v_x(t) = + \frac{eE}{m} \quad (1)}$$

$$\boxed{\frac{dv_y(t)}{dt} + \frac{k}{m} v_y(t) = 0 \quad (2) \qquad \frac{dv_z(t)}{dt} + \frac{k}{m} v_z(t) = 0 \quad (3)}$$

(ici $\vec{E} \parallel \vec{e_x}$ $\quad \vec{E} \perp \vec{e_y}$ $\quad \vec{E} \perp \vec{e_z}$) et $\vec{E} = -E\,\vec{e_x}$

b) Résolut° des 3 équat° différentielles $\Rightarrow$ déterminer $\vec{v}_{e^-}$

(2) et (3) $\hat{m}$ forme $\Rightarrow$ même type de solut° ! $\quad \frac{dv_y(t)}{dt} + \frac{k}{m} v_y(t) = 0$

- la forme mathématique est $f'(x) + A f(x) = 0$ que vaut $f(x)$?

$f'(x) + A f(x) = 0$

avec $f'(x) = \frac{df(x)}{dx}$

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = -A$$

$$\frac{d}{dx} \ln f(x) = -A$$

on intègre par rapport à x

$\Rightarrow \ln f(x) = -Ax + K_0$

cste d'intégrat°

équat° (2) $\quad v_y'(t) + \frac{k}{m} v_y(t) = 0$

avec $v_y'(t) = \frac{dv_y(t)}{dt}$

$$\frac{v_y'(t)}{v_y(t)} = -\frac{k}{m} \iff \frac{\frac{dv_y(t)}{dt}}{v_y(t)} = -\frac{k}{m}$$

$$\frac{d}{dt} \ln v_y(t) = -\frac{k}{m}$$

$\Rightarrow$ on intègre par rapport à t : $\ln v_y(t) = -\frac{k}{m} t + \text{cste}$

plus pratique la cste est de la forme $\ln A_y$

$\Rightarrow \ln v_y(t) = -\frac{k}{m} t + \ln A_y$

ou $\ln v_y(t) - \ln A_y = -\frac{k}{m} t$

soit $\ln \frac{v_y(t)}{A_y} = -\frac{k}{m} t \longrightarrow$ exponentiation $\exp(\ln u) = u$

$$\exp\left[\ln\left(\frac{v_y(t)}{A_y}\right)\right] = \exp\left(-\frac{k}{m} t\right) \Rightarrow \boxed{v_y(t) = A_y\, e^{-\frac{k}{m} t}} \quad \text{solut° (2)}$$

de même la relat° (3) $\Rightarrow \boxed{v_z(t) = A_z\, e^{-\frac{k}{m} t}} \quad$ solut° de (3)

la solut° physique de (2) et (3) prend en considération les contraintes du pbm physique à savoir à $t \leq 0$ $\vec{v} = \vec{0}$ $\Rightarrow v_y(0) = v_z(0) = v_x(0) = 0$

or $v_y(0) = A_y$ et $v_z(0) = A_z \Rightarrow A_y = 0$

$A_z = 0$

les e^- se déplacent suivant $\vec{e_x}$.

– Cas de 1 $\frac{dv_x(t)}{dt} + \frac{k}{m} v_x(t) = +\frac{e}{m} E$ équaθ différentielle du 1er ordre avec 2nd membre : Il faut établir la soluθ générale (mathématiquement $f'(x) + a f(x) = b$) et appliquer les conditions physiques pour trouver la soluθ !

Soluθ générale en 2 étapes = Soluθ sans le 2nd membre + Soluθ particulière

(1) soluθ sans le 2nd membre (b)

$$\frac{dv_x(t)}{dt} + \frac{k}{m} v_x(t) = 0 \Rightarrow \frac{dv_x(t)}{dt} \Big/ v_x(t) = -\frac{k}{m} \xrightarrow{\text{intégré}} \ln(v_x(t)) = -\frac{k}{m}t + \overset{\ln A_x}{K_0}$$

$$\Rightarrow \ln\left(\frac{v_x(t)}{A_x}\right) = -\frac{k}{m}t \xrightarrow{\text{exponentiation}} \exp\left[\ln\left(\frac{v_x(t)}{A_x}\right)\right] = -e^{-\frac{k}{m}t}$$

d'où $\boxed{v_x(t) = A_x e^{-\frac{k}{m}t}}$

(2) soluθ particulière = a la même forme que le 2nd membre : ici "constante"
il existe donc une solution indépendante du temps v_0 qui est injectée dans la relation (1)

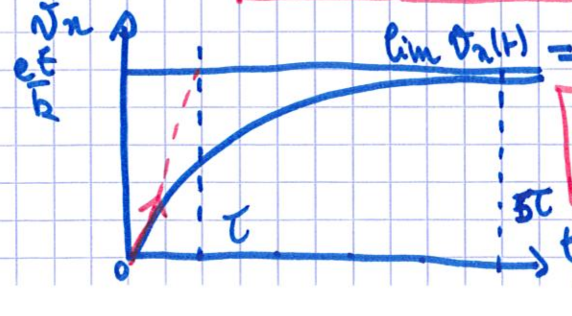
$$\frac{dv_x(t)}{dt} + \frac{k}{m} v_x(t) = +\frac{e}{m} E \xRightarrow{v_0} \overbrace{\frac{dv_0}{dt}}^{=0} + \frac{k}{m} v_0 = +\frac{e}{m} E \Rightarrow \boxed{v_0 = +\frac{e}{k} E}$$

⇒ Solution générale $\boxed{v_x(t) = A_x e^{-\frac{k}{m}t} + \frac{e}{k} E}$

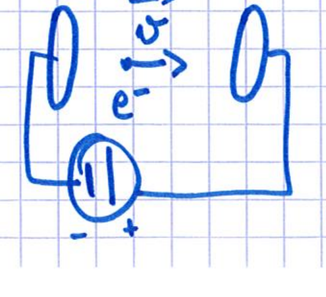
Les contraintes du problème physique permettent de déterminer A_x : à $t=0$ $\vec{v} = \vec{0}$

$$v_x(0) = 0 \Rightarrow A_x + \frac{e}{k} E = 0 \Rightarrow A_x = -\frac{e}{k} E \qquad \tau = \frac{m}{k}$$

Soluθ $\boxed{v_x(t) = \frac{eE}{k}\left[-e^{-\frac{k}{m}t} + 1\right]} = -\frac{eE}{k}\left[e^{-\frac{kt}{m}} - 1\right]$



$\boxed{\Rightarrow \vec{v}_{lim} = -\frac{eE}{k}}$



l'e⁻ sort par le côté (+) du cylindre ok. (charge négative).