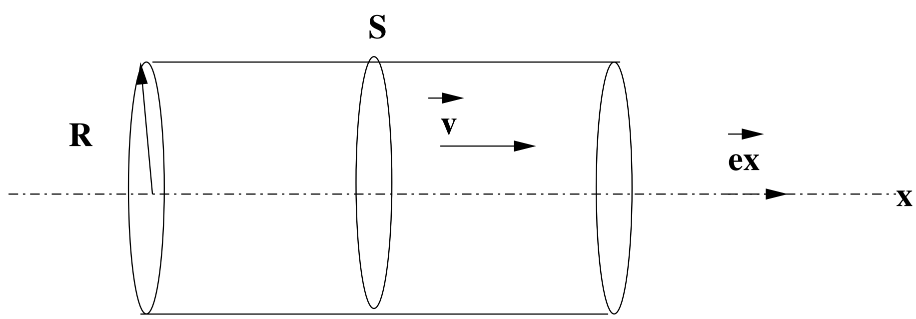
Chapitre I : Intensité - Loi d'Ohm - Effet joule

1 Intensité - vecteur densité de courant $\vec{j}$

1.1 Intensité d'un faisceau de particules

Soit un faisceau cylindrique de particules de charge q.



Hypothèses :

- Distribution des charges homogène : Densité particulaire n
- Faisceau monocinétique $\vec{v} = v\vec{e_x}$
- Sur l'intervalle de temps $[t, t + dt]$ le nombre de particules qui traversent la section **S** est : $\Delta N = vdt \times S \times n$
  Ce qui permet de déduire la quantité de charge :

$$\Delta Q = q\Delta N = qnsvdt$$

Définition : L'intensité du faisceau est :

$$I = \frac{\Delta Q}{\Delta t} = qnsv$$

quantité de charge traversant la section **S** pendant l'unité de temps.

1.2 Vecteur densité de courant $\vec{j}$

Définition :

$$\vec{j} = nq\vec{v}$$

avec le module $j = \|\vec{j}\| = n|q|v$ d'où

$$\boxed{I = \vec{j} \cdot S\vec{e_x}}$$

Par convention le sens du courant est le sens de déplacement des charges positives.

$q > 0 \qquad I > 0$	$\vec{j}$ et $\vec{v}$ de même sens	$[I] = A$ (Ampère)
$q < 0 \qquad I < 0$	$\vec{j}$ et $\vec{v}$ de sens opposé	$[j] = Am^{-2}$

2 Modèle microscopique de la conduction électrique dans les métaux

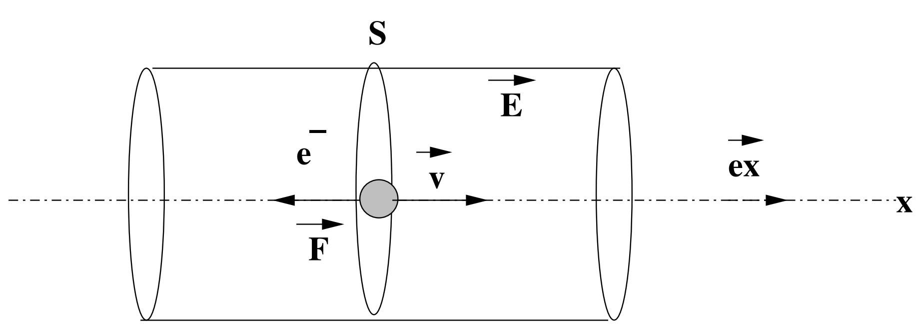
2.1 Trois hypothèses :

- Les porteurs de charges sont les e^- libres de densité particulaire n
- En présence de $\vec{E}$, champ électrique créé par la ddp appliquée aux bornes du conducteur, ces e^- sont animés d'une vitesse moyenne $\vec{v(t)} \Longrightarrow$ Le conducteur est le siège d'un courant caractérisé par le vecteur densité de courant $\vec{j(t)} = -ne\vec{v(t)}$. $e \sim 1,6 \times 10^{-19}C$
- Les collisions subies par les e^- de conduction en traversant le conducteur $\Longleftrightarrow$ à une force de frottement appliquée à chacun des e^-.

$$\vec{f(t)} = -k\vec{v(t)} \qquad k > 0$$

2.2 Équations différentielles du mouvement d'un électron dans le conducteur

Remarque :
$m_{e^-} = 9,1 \times 10^{-31}$ kg soit $\|P\| = mg = 9 \times 10^{-30}$N
$\vec{F} = q\vec{E}$ soit $\|F\| = qE = 1,6 \times 10^{-18}$ N
(E trouvé avec 220 V sur qq 10cm)
$\vec{P} \Longrightarrow$ négligeable par rapport à $\vec{F}$.



Relation Fondamentale de la Dynamique : $m\vec{a(t)} = -e\vec{E} - k\vec{v(t)}$

$$\boxed{\vec{a(t)} + \frac{k}{m}\vec{v(t)} = \frac{-e}{m}\vec{E}}$$

Équation différentielle du mouvement d'un e^-.

$$\vec{a(t)} \cdot \vec{e_x} + \frac{k}{m}\vec{v(t)} \cdot \vec{e_x} = \frac{-e}{m}E$$

$$\Longrightarrow \frac{dv_x(t)}{dt} + \frac{k}{m}v_x(t) = -\frac{e}{m}E \qquad (1)$$

$$\vec{a(t)} \cdot \vec{e_y} + \frac{k}{m}\vec{v(t)} \cdot \vec{e_y} = 0 \Longrightarrow \frac{dv_y(t)}{dt} + \frac{k}{m}v_y(t) = 0 \qquad (2)$$

$$\vec{a(t)} \cdot \vec{e_z} + \frac{k}{m}\vec{v(t)} \cdot \vec{e_z} = 0 \Longrightarrow \frac{dv_z(t)}{dt} + \frac{k}{m}v_z(t) = 0 \qquad (3)$$

$\Longrightarrow$ 3 équations différentielles à résoudre :

$$(2)\ \&\ (3)\ \text{solution évidente : } v_y = A_y exp(-\frac{k}{m}t) \qquad v_z = A_z exp(-\frac{k}{m}t)$$

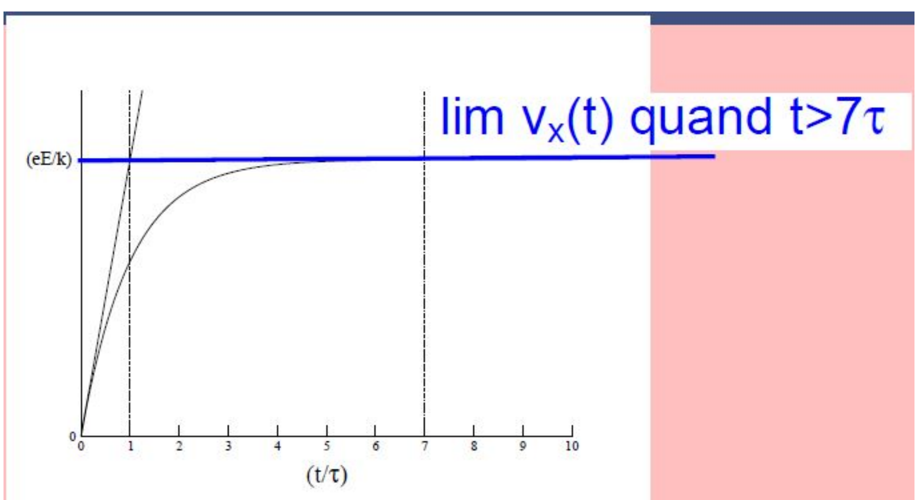
Remarque :

Avant t=0 (date d'application de $\vec{E}$) toutes les directions de vitesses sont équiprobables.
$\Longrightarrow v_y = v_z = 0$. En effet il n'y a pas d'e^- qui sort d'un conducteur non soumis à une ddp.
$\Longrightarrow A_y = A_z = 0$.

Résolution de (1) :

- Solution générale : $v_x = -\frac{eE}{k} + A_x exp(-\frac{k}{m}t)$
- Solution particulière :
  à t=0 $v_x = v_y = v_z = 0 \Rightarrow A_x = e\frac{E}{k}$
- Solution complète :
  $v_x(t) = e\frac{E}{k}[exp(-\frac{k}{m}t) - 1]$. On pose $\tau = \frac{m}{k}$

$$\Longrightarrow \vec{v} = -\frac{e}{k}\left[1 - exp(-\frac{t}{\tau})\right]\vec{E}$$



$exp(-\frac{t}{\tau}) << 1$ et $exp(-7) = 910^{-4}$ pour $t > 7\tau$. Il y a donc établissement d'une vitesse constante uniforme $\vec{v_0}$, cad d'un régime permanent. Les e^- ont un mvt rectiligne uniforme à l'intérieur du conducteur selon la direction du champ appliqué. On peut alors définir une nouvelle quantité : la mobilité de l'électron dans le conducteur μ_e.

$$\boxed{\vec{v_0} = -\frac{e}{k}\vec{E} = \mu_e\vec{E}}$$

tel que $\mu_e < 0$ et $[\mu_e] = m^2s^{-1}V^{-1}$

2.3 Loi d'Ohm locale - Conductivité - Résistivité

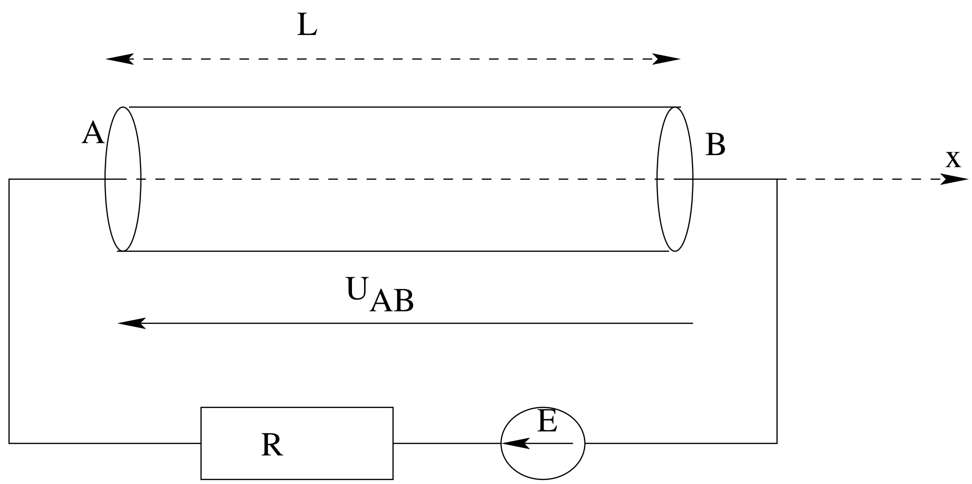
$\vec{j}$ s'écrit alors $\Longrightarrow \vec{j} = -n_e\vec{v_0} = \frac{ne^2}{k}\vec{E}$ est toujours dirigé selon $\vec{E}$.

C'est la loi d'Ohm locale : $\boxed{\vec{j} = \gamma\vec{E} \text{ avec } \gamma = \frac{ne^2}{k}}$

- tel que $\gamma > 0$ et $[\gamma] = \Omega^{-1}m^{-1}$. γ est appelée conductivité du conducteur.
- On définit ρ la résistivité du conducteur par $\rho = \frac{1}{\gamma}$

  $\rho = \frac{k}{ne^2} \Longrightarrow$ est proportionnelle à k, cad à la résistance au mvt des e^- dans le conducteur exercée par le milieu extérieur.

2.4 Loi d'Ohm macroscopique



$$U_{AB} = V_A - V_B \quad \vec{E} = \frac{U}{L}\vec{e_x} \quad I = \vec{J}\cdot S\vec{e_x} = \gamma\frac{S}{L}U$$

$$\boxed{U = \frac{1}{\gamma}\frac{L}{S}I = RI}$$

avec $R = \frac{L}{\gamma S}$ résistance du conducteur exprimée en Ω

2.5 Loi de Joule

2.5.1 Puissance Joule

Lorsque le régime permanent est établi alors :

$$\vec{f} = -k\vec{v_0} = -k\frac{-e}{k}\vec{E} = e\vec{E}$$

Le travail de $\vec{f}$ pendant $[t, t+dt]$ est :

$$W(\vec{f}) = \vec{f}\cdot\vec{v_0}\Delta t = e\vec{E}\cdot(\frac{-e}{k})\vec{E}\Delta t = -\frac{e^2E^2}{k}\Delta t$$

$$\boxed{W(\vec{f}) = -\frac{e^2U^2}{kL^2}\Delta t}$$

Pour l'ensemble des e^- , l'énergie dissipée par "frottement" est :

$$\Delta W = \big(-\frac{e^2U^2}{kL^2}\Delta t\big) \times nSL = -\big(n\frac{e^2}{k}S\frac{U^2}{L}\big)\Delta t$$

Or $\gamma = \frac{ne^2}{k}$ et $R = \rho\frac{L}{S} = \frac{1}{\gamma}\frac{L}{S} \Longrightarrow R\gamma = \frac{L}{S}$
$\Longrightarrow \Delta W = -\frac{\gamma U^2}{R\gamma}\Delta t$ avec $U = RI$

$$\boxed{\Longrightarrow \Delta W = RI^2\Delta t}$$

ce qui conduit à l'expression de la puissance dissipée :

$$\boxed{P = \frac{\Delta W}{\Delta t} = RI^2 \text{ Puissance Joule}}$$

2.5.2 Coexistence de plusieurs types de charge

Plusieurs type de charges positives ou négatives sont susceptibles d'être mobiles. Elles sont caractérisées par :
- n_i : densité des particules i
- v_i : vitesse des particules i en régime permanent
- q_i : charge des particules i

Soit $\vec{E} = E\vec{e_x}$ le champ uniforme qui règne à l'intérieur du conducteur.

$$\vec{v_i} = \mu_i\vec{E} \qquad \begin{array}{l} \mu_i > 0 \text{ si charge } q_i > 0 \\ \\ \mu_i < 0 \text{ si charge } q_i < 0 \end{array}$$

Le vecteur densité de courant total est alors :

$$\begin{aligned} \vec{j} = &\quad n_1q_1\vec{v_1} + n_2q_2\vec{v_2} + \ldots + n_iq_i\vec{v_i} + \ldots \\ \vec{j} = &\quad [n_1q_1\mu_1 + n_2q_2\mu_2 + \ldots]\vec{E} \\ \vec{j} = &\quad \big(\sum_{i=1}^{N} n_iq_i\mu_i\big)\vec{E} \end{aligned}$$

La conductivité totale du milieu est

$$\vec{j} = \gamma\vec{E} \rightarrow \gamma = \sum_{i=1}^{N} n_iq_i\mu_i$$

- Remarque : $q_i\mu_i > 0$ toujours vrai car q_i et μ_i de même signe $\Longrightarrow \gamma$ est toujours POSITIF.