Exercice sur le gradient

1) Règle de composition des dérivées.

Soit f et g des fonctions différentiables, on peut définir la fonction composée h :

$$\mathrm{h(t)} = (\mathrm{f} \circ \mathrm{g})(\mathrm{t}) = \mathrm{f}\big(\mathrm{g(t)}\big)$$

La dérivée de h par rapport à t s'exprime alors (règle de la chaine) :

$$\frac{\mathrm{dh}}{\mathrm{dt}}(\mathrm{t}) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}(\mathrm{f} \circ \mathrm{g})(\mathrm{t}) = \mathrm{f}'\big(\mathrm{g(t)}\big) \times g'(t)$$

Que l'on note parfois

$$\frac{\mathrm{dh}}{\mathrm{dt}}(\mathrm{t}) = \underbrace{\frac{df}{dg}}_{\mathrm{f}'(\mathrm{g(t)})} \times \underbrace{\frac{dg}{dt}}_{g'(t)}$$

a. soit $f(x) = x^2$ et $g(t) = cos(t)$, calculer la dérivée de $(f \circ g)(t) = cos^2(t)$

b. soit $f(x) = e^x$ et $g(t) = t^2$, calculer la dérivée de $(f \circ g)(t) = e^{t^2}$

On peut généraliser cette propriété à une fonction f dépendant de plusieurs variables. Soit $f(x, y, z)$ dépendant de trois variables (x, y, z) et trois fonctions $x = u(t)$, $y = v(t)$ et $z = w(t)$.

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}} f(u(t), v(t), w(t)) = \frac{\partial f}{\partial x} \underbrace{\frac{dx}{dt}}_{u'(t)} + \frac{\partial f}{\partial y} \underbrace{\frac{dy}{dt}}_{v'(t)} + \frac{\partial f}{\partial z} \underbrace{\frac{dz}{dt}}_{w'(t)}$$

2) Notion d'isosurface.

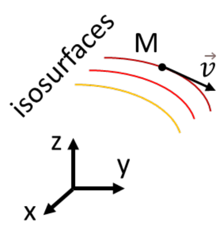
Soit un champ scalaire $f(x, y, z)$, avec (x, y, z) des coordonnées. Le champ scalaire f peut par exemple représenter une énergie potentielle. On appelle isosurface l'ensemble des points $M(x, y, z)$ tel que $f(x, y, z) = c$, avec c une constante.

Soit $\vec{v} = (v_x, v_y, v_z)$ un vecteur unitaire tangent en un point $M(x, y, z)$ à une isosurface caractérisée par $f(x, y, z) = c$. Si on se déplace d'une petite distance ϵ dans la direction $\vec{v}$, le point $N(x + \epsilon v_x, y + \epsilon v_y, z + \epsilon v_z)$ reste sur la même isosurface.

a. En déduire $\frac{d}{d\epsilon} f(x + \epsilon v_x, y + \epsilon v_y, z + \epsilon v_z) = 0$

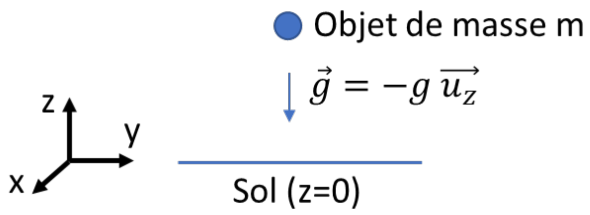
b. En déduire que $\frac{\partial f}{\partial x} v_x + \frac{\partial f}{\partial y} v_y + \frac{\partial f}{\partial z} v_z = 0$

c. En conclure que le gradient du champs scalaire $\overrightarrow{grad}(f)$ en $M(x, y, z)$ est perpendiculaire à $\vec{v}$.



Cette propriété étant vraie pour tous les vecteurs $\vec{v}$ tangents à l'isosurface, on peut conclure que le gradient $\overrightarrow{grad}(f)$, calculé en un point $M(x, y, z)$, est orthogonal à l'isosurface passant au point $M(x, y, z)$.

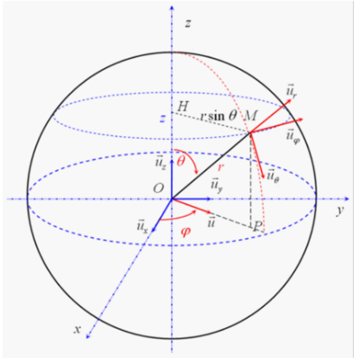
3) **Force dérivant d'un potentiel : la force de pesanteur**

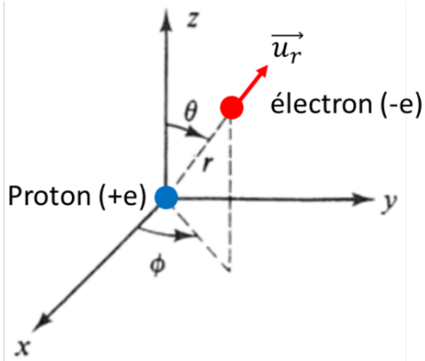


Le potentiel de pesanteur s'exprime $U(z) = mgz$

a. Représenter les isosurfaces de potentiel $U(z)$ sur le schéma ci-dessus
b. Calculer le gradient de $U(z)$
c. En déduire l'expression vectorielle de la force de pesanteur.
d. Comment cette force est-elle orientée vis-à-vis des isosurfaces de potentiel ?

4) **Force dérivant d'un potentiel : l'Interaction électrostatique**





Le potentiel d'interaction entre un électron et un proton exprimé dans les coordonnées sphérique vaut $U(r) = -\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r}$, avec r la distance entre l'électron et le proton, e la charge élémentaire et ϵ_0 la constante diélectrique du vide.

a. Représenter les isosurfaces de potentiel $U(r)$ en considérant le proton fixe et le potentiel s'appliquant à l'électron.
b. Le gradient en coordonnées sphériques s'exprime :

$$\overrightarrow{grad}\big(f(r,\theta,\phi)\big) = \frac{\partial f}{\partial r}\overrightarrow{u_r} + \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial \theta}\overrightarrow{u_\theta} + \frac{1}{r\sin(\theta)}\frac{\partial f}{\partial \phi}\overrightarrow{u_\phi}$$

En déduire l'expression vectorielle de la force électrostatique… en remarquant bien que le potentiel U ne dépend que de r.
c. Comment cette force est-elle orientée vis-à-vis des isosurfaces de potentiel ?