

UERB35 – Bloc 2 - MicroMacro

Relations utiles :

$$\text{Soit } I_n = \int_0^{\infty} t^n e^{-at^2} dt \text{ avec } a > 0; \quad I_{n+2} = \frac{n+1}{2a} I_n; \quad I_0 = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{a}}; \quad I_1 = \frac{1}{2a}$$

l) Théorie Cinétique des gaz :

- 1) En théorie cinétique des gaz, une approche microscopique des collisions entre une espèce de masse m composant le gaz et les parois permet de retrouver pour le gaz parfait la relation entre la pression partielle P associée à cette espèce, la masse m , la densité volumique de cette espèce N , le volume V et la vitesse quadratique moyenne de cette espèce $\langle v^2 \rangle$:

$$PV = \frac{mN}{3} \langle v^2 \rangle$$

Donner les suppositions associées au modèle (nature des collisions, propriétés statistiques de la distribution des vitesses).

- 2) En utilisant la loi des gaz parfaits et la relation donnée à la question 1, retrouver la valeur moyenne de l'énergie cinétique $\langle E_c \rangle$ pour une molécule de masse m .
- 3) On donne la loi de distribution des vitesses de Maxwell pour un gaz parfait :

$$f(v_x, v_y, v_z) = \left(\frac{m}{2\pi k_B T} \right)^{3/2} \exp \left(-\frac{m}{2k_B T} (v_x^2 + v_y^2 + v_z^2) \right) \text{ avec } \vec{v} = (v_x, v_y, v_z)$$

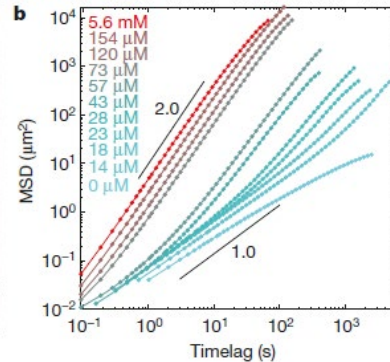
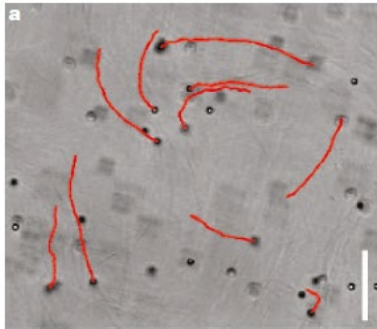
Que représente $dp = f(v_x, v_y, v_z) dv_x \cdot dv_y \cdot dv_z$?

- 4) Justifier que cette loi est cohérente avec un comportement isotrope et avec le fait que les variables aléatoires V_x, V_y et V_z (les trois composantes de la vitesse) sont indépendantes.
- 5) Quel sens donner à la relation $f(v_x) = \iint_{-\infty}^{+\infty} f(v_x, v_y, v_z) dv_y dv_z$?
- 6) A l'aide du formulaire, montrer que $f(v_x) = \left(\frac{m}{2\pi k_B T} \right)^{1/2} \exp \left(-\frac{m}{2k_B T} v_x^2 \right)$.
- 7) Tracer $f(v_x)$ pour v_x dans $]-\infty, +\infty[$. Sur cette courbe, que représente $\sqrt{\frac{k_B T}{m}}$?
- 8) Lorsque la température augmente, comment évolue la distribution $f(v_x)$? Que cela signifie-t-il sur la probabilité qu'une molécule ait une vitesse élevée ?

- 9) Exprimer sous une forme intégrale $\langle v_x^2 \rangle$, la valeur moyenne de v_x^2 , en fonction de $f(v_x)$.
- 10) Montrer que l'expression précédente conduit à $\langle v_x^2 \rangle = \frac{k_b T}{m}$.
- 11) Retrouver alors la valeur moyenne de l'énergie cinétique $\langle E_c \rangle$ (vous devez trouver la même réponse qu'à la question b !).

II) Lecture d'articles :

- 1) Dans T. Sanchez et al. (*Spontaneous motion in hierarchically assembled active matter*, Nature 2012), les trajectoires d'un ensemble de particules

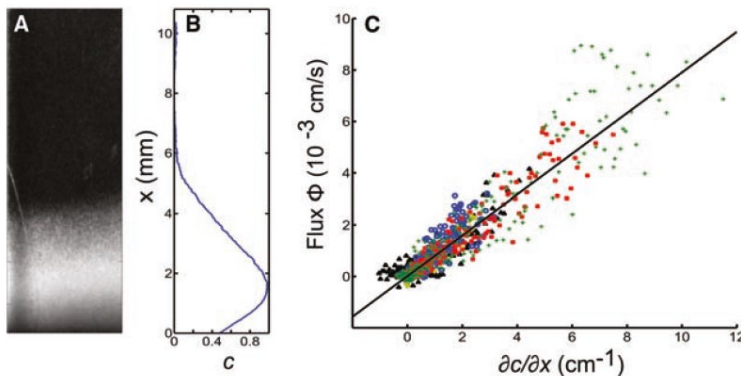


sont suivies au cours du temps (figure a). A chaque instant, on peut donc mesurer la distance parcourue par chacune des particules par rapport à leur position d'origine (à $t=0$). La figure b montre la variance de

cet éloignement (MSD) en fonction du temps écoulé depuis l'origine du temps $t=0$.

- a) Justifier que dans la figure b, une pente de 1 correspond à un comportement diffusif.
- b) Que signifie une pente supérieure à 1.

- 2) Dans M. Polin et al. (*Chlamydomonas Swims with Two "Gears" in a Eukaryotic Version of Run-and-Tumble Locomotion*, Science 2009), on observe un gradient de concentration $c(x)$ de cellules (figure A et B) selon un axe vertical x . On trace dans la figure C le flux de cellule $J(x)$ en fonction du gradient de concentration $\frac{\partial c}{\partial x}$.



- a) Quelle loi est illustrée par la tendance générale dans la figure C (l'écrire)?
- b) A quel paramètre physique correspond la pente de la courbe dans la figure C?

- 3) Pourquoi une brisure de symétrie tel qu'observée lors de la localisation de granule P dans une extrémité d'une cellule ne peut pas être expliquée avec un simple phénomène de diffusion ?

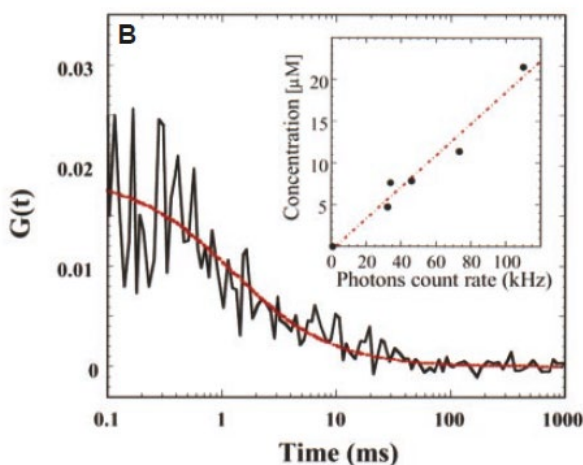
- 4) S. Kondo et al. (*Reaction-Diffusion Model as a Framework for Understanding Biological Pattern Formation*, Science 2010), illustrent une version simple du modèle de Turing (ici à 1D) appliqué à deux espèces de concentrations u et v :

$$\frac{\partial u}{\partial t} = f_u u + f_v v + D_u \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} = g_u u + g_v v + D_v \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}$$

- Que décrivent ces équations si les constantes f_u, f_v, g_u et g_v sont nulles ?
- Quel est alors le sens physique des coefficients D_u et D_v .
- Que signifient les termes linéaires en u et v ?
- En appliquant la méthode d'Euler à l'équation $\frac{\partial u(t,x)}{\partial t} = f_u u(t,x)$, donner un sens physique à $f_u dt$ (avec dt un temps infinitésimal) et préciser son unité.
- On parle généralement d'activateur pour u et d'inhibiteur pour v . Quel doit être le signe de f_v pour que cette terminologie ait du sens ?
- On pose $u(x,t) = u_0 e^{\alpha t} \sin(kx)$ et $v(x,t) = v_0 e^{\alpha t} \sin(kx)$, avec u_0 et v_0 deux concentrations initiales, et α le taux de croissance de la composante spatiale associée à la période spatiale $\frac{2\pi}{k}$.
En injectant $u(x,t)$ et $v(x,t)$ dans le système d'équation, en déduire deux relations entre α et k (indépendante de t et x), ayant pour paramètre $f_u, f_v, g_u, g_v, D_u, D_v, u_0$ et v_0 (on ne cherche pas à le résoudre).
- Quel doit être le signe de α pour que la composante spatiale k croisse ?

- 5) Dans P. Cluzel et al. (*An Ultrasensitive Bacterial Motor Revealed by Monitoring Signaling Proteins in Single Cells*, Science 2000), on observe en microscopie confocale l'intensité d'émission d'une assemblée d'émetteurs dans un liquide. Par diffusion, le nombre d'émetteurs dans la boîte focale (volume de détection) fluctue au cours du temps. On trace la fonction d'auto-correlation $G(t)$ de l'intensité observée (voir ci-contre) qui peut être approchée par la fonction



qui peut être approchée par la fonction $\frac{A}{1+4Dt/\omega^2}$, avec D le coefficient de diffusion et ω le diamètre du volume de détection.

- Que signifie physiquement $G(t)$ tend vers 0 ?
- Pouvez-vous expliquer la dépendance en Dt/ω^2 ? (Vous pourrez utiliser la notion de mouvement Brownien)