# Correction DM (2026)



## I Théorie Cinétique des gaz

Vous aurez surement remarqué une erreur dans le texte, N représente le nombre d'objets, et pas leur densité volumique ($N/V$).

1) Hypothèses du modèle du gaz parfait :

- Sphère dure de diamètre négligeable :
  - -> Pas de collisions entre sphères
  - -> Pas de degré de liberté interne, i.e. pas de vibration / rotation au seins des molécules.
- Intéractions élastiques
- Chaos moléculaire : les positions et les quantités de mouvement des sphères sont distribuées au hasard selon une loi statistique

2) Loi des gaz parfaits : $PV = NRT$

ce qui implique $NRT = \frac{mN}{3} \langle v^2 \rangle \Rightarrow \langle v^2 \rangle = 3\frac{RT}{m}$

Energie cinétique moyenne $\langle E_c \rangle = \langle \frac{1}{2} m v^2 \rangle = \frac{1}{2} m \langle v^2 \rangle$

$\langle E_c \rangle = \frac{3}{2} RT$ cohérent avec l'équi-partition de l'energie.

3) $dp$ : Probabilité que

la composante selon x de la vitesse soit dans $[v_x, v_x + dv_x]$

et " " " y " " " " " $[v_y, v_y + dv_y]$

et " " " z " " " " " $[v_z, v_z + dv_z]$

4) On peut ré-écrire $dp$ en séparant les variables $v_x$, $v_y$ et $v_z$ :

$$dp = \left(\frac{m}{2\pi k_B T}\right)^{1/2} \exp\left(-\frac{m}{2 k_B T} v_x^2\right) dv_x \times \left(\frac{m}{2\pi k_B T}\right)^{2} \exp\left(-\frac{m}{2 k_B T} v_y^2\right) dv_y$$

$$\times \left(\frac{m}{2\pi k_B T}\right)^{1/2} \exp\left(-\frac{m}{2 k_B T} v_z^2\right) dv_z$$

$$= R(v_x)\, dv_x \times R(v_y)\, dv_y \times R(v_z)\, dv_z$$

avec $R(v_i) = \left(\frac{m}{2\pi k_B T}\right)^{1/2} \exp\left(-\frac{m v_i^2}{2 k_B T}\right)$

$dp$ est donc le produit de trois probabilités $R(v_i)\,dv_i$ avec $v_i = v_x, v_y, v_z$ ce qui est cohérent avec le fait que $V_x$, $V_y$, $V_z$ sont trois variables aléatoires indépendantes.

Rem : vous pouvez vérifier que $R(v_i)$ est bien normé,

i.e. $\int_{-\infty}^{+\infty} R(v_i)\, dv_i = 1$

5) $f(v_x)$ est la densité de probabilité associée à la composante selon $x$ de la vitesse, sous-entendu quelles que soient les valeurs de $v_y$ et $v_z$ :

$\Rightarrow$ les intégrales selon $v_y$ et $v_z$ traduisent "quelles que soient"

On somme les valeurs de $R(v_y)$ et $R(v_z)$, on va alors avoir $f(v_x) = R(v_x)$.

6)

$$f(v_x) = \iint_{-\infty}^{+\infty} f(v_x, v_y, v_z)\, dv_y\, dv_z$$

$$= \iint_{-\infty}^{+\infty} h(v_x)\, h(v_y)\, h(v_z)\, dv_y\, dv_z$$

$$= h(v_x) \times \int_{-\infty}^{+\infty} h(v_y)\, dv_y \times \int_{-\infty}^{+\infty} h(v_z)\, dv_z$$

or $$\int_{-\infty}^{+\infty} h(v_y)\, dv_y = \left(\frac{m}{2\pi k_B T}\right)^{1/2} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(-\frac{m}{2k_B T} v_y^2\right) dv_y$$

$$= \left(\frac{m}{2\pi k_B T}\right)^{1/2} \cdot 2 \cdot \int_{0}^{\infty} \exp\left(-\frac{m}{2k_B T} v_y^2\right) dv_y$$

Fonction paires

identification $t \longleftrightarrow v_y$

$a \longleftrightarrow \frac{m}{2k_B T}$

$n \longleftrightarrow 0$

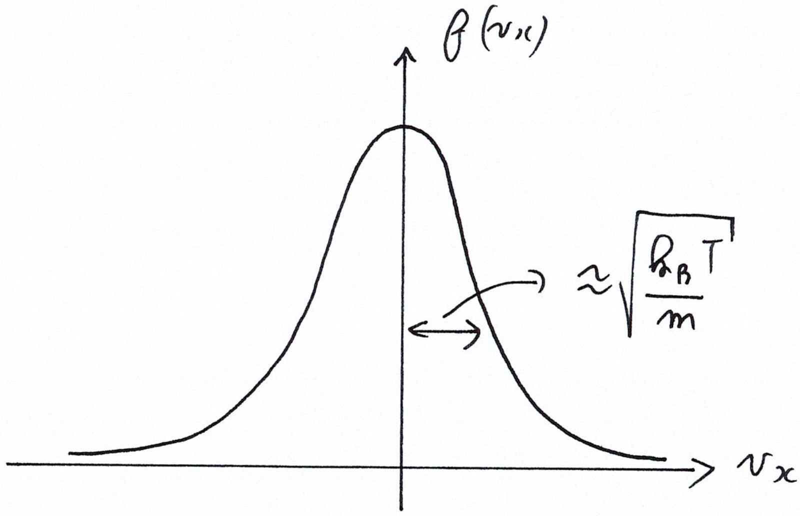
$$= \left(\frac{m}{2\pi k_B T}\right)^{1/2} 2 \cdot \frac{1}{2} \left(\frac{2\pi k_B T}{m}\right)^{1/2}$$

$$= 1$$

idem pour $\int_{-\infty}^{+\infty} h(v_z)\, dv_z = 1$

donc $f(v_x) = h(v_x)$

7)




On reconnait la loi normale centrée de variance $\frac{k_B T}{m}$

$\sqrt{\frac{k_B T}{m}}$ correspond donc à l'écart type, qui donne une information sur la demi-largeur de la courbe

8) si $T \nearrow$ la largeur de la courbe augmente.
On a donc un étalement des vitesses probables.
La probabilité des vitesses élevées augmente

9) $$\langle v_x^2 \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} v_x^2 f(v_x)\, dv_x$$

10) $$\langle v_x^2 \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} v_x^2 \left(\frac{m}{2\pi k_B T}\right)^{1/2} \exp\left(-\frac{m}{2 k_B T} v_x^2\right) dv_x$$

$$= \left(\frac{m}{2\pi k_B T}\right)^{1/2} \times 2 \int_0^{+\infty} v_x^2 \exp\left(-\frac{m}{2 k_B T} v_x^2\right) dv_x$$

fonction paire

identification $\left| \begin{array}{l} t \longleftrightarrow v_x \\ a \longleftrightarrow \frac{m}{2 k_B T} \\ n \longleftrightarrow 2 \end{array} \right.$

$$= \left(\frac{m}{2\pi k_B T}\right)^{1/2} \times 2 \times \overbrace{\frac{1}{2} \frac{2 k_B T}{m} \cdot \overbrace{\frac{1}{2}\left(\frac{2\pi k_B T}{m}\right)^{1/2}}^{I_0}}^{I_2}$$

Ce qui conduit à $\langle v_x^2 \rangle = \frac{k_B T}{m}$

11) Le même calcul donnera $\langle v_y^2 \rangle = \langle v_z^2 \rangle = \frac{k_B T}{m}$

$$\langle v^2 \rangle = \langle v_x^2 + v_y^2 + v_z^2 \rangle$$
$$= \langle v_x^2 \rangle + \langle v_y^2 \rangle + \langle v_z^2 \rangle$$
$$= \frac{k_B T}{m} + \frac{k_B T}{m} + \frac{k_B T}{m} = 3 \frac{k_B T}{m}$$

$$\langle E_c \rangle = \langle \frac{1}{2} m v^2 \rangle = \frac{1}{2} m \langle v^2 \rangle$$
$$= \frac{3}{2} k_B T \quad \text{C.Q.F.D.}$$

## II) Lecture d'articles

1a) Le MSD, pour Mean Squared Displacement, correspond à la variance de la statistique d'éloignement d'un au bout d'un temps donné $t$

Pour un mouvement Brownien, on a montré que le MSD vaut $2Dt$ avec $D$ le coefficient de diffusion.

$\Rightarrow \log(MSD) = \log(2D) + 1\times\log(t)$ : loi affine de pente 1 entre $\log(MSD)$ et $\log(t)$

$\Rightarrow$ une pente de 1 pour $MSD(t)$ tracé en échelle log-log est donc cohérent avec un comportement diffusif.

1b) Une pente $>1$ signifie que le comportement est super-diffusif, jusqu'à tendre vers un comportement balistique

un comportement balistique nommé un déplacement en ligne droite, où la distance d parcourue s'exprime simplement $d = v\,t$ ← temps.
↙ vitesse (ici constante)

$$d^2(t) = v^2 t^2 \quad \forall t$$

et donc $MSD(t) = v^2 t^2$

$$\log(MSD) = \log(v^2) + 2 \log(t)$$

↑ pente de 2

Dans la figure les MSD avec une pente de 2 correspondent à des comportements balistiques.

2 a) C'est la loi de Fick

$$\vec{J}(\vec{r}) = -D\,\vec{\text{grad}}\,c(\vec{r}) \xrightarrow[\text{selon } x]{1D} |J(x)| = D\left|\frac{\partial c(x)}{\partial x}\right|$$

Ce sont les normes qui sont tracées

2 b) La pente correspond à D, le coefficient de diffusion

3) La diffusion a tendance à homogénéiser les concentration. Il n'est donc pas possible que seule elle conduise à une localisation spatiale d'objets tels que les granules P.

4 a) Si les coefficients $\beta_u$, $\beta_v$, $g_u$ et $g_v$ sont nuls, les deux équations décrivent alors la diffusion des espèces u et v de manière découplé.

4b) $D_u$ et $D_v$ sont respectivement les coefficients de diffusion des espèces u et v

4c) $\beta_u u$ : production ($\beta_u > 0$) ou destruction ($\beta_u < 0$) de u par la présence de u.

$\beta_v v$ : 〃 〃 〃 〃
u par la présence de v

$g_u u$ 〃 〃 〃 〃
v 〃 〃 〃 〃 u

$g_v v$ 〃 〃 〃 〃
v 〃 〃 〃 〃 v

4d) $$\frac{\partial u(t,x)}{\partial t} = \beta_u \, u(t,x)$$

$$\Rightarrow \frac{u(t+dt,x) - u(t,x)}{dt} = \beta_u \, u(t,x)$$

$$\Rightarrow u(t+dt,x) = (1 + \underbrace{\beta_u \, dt}_{\text{sans unité}}) \, u(t,x)$$

$\beta_u dt$ : proba de produire (/détruire) un élément d'espèce u par la présence d'un autre élément d'espèce u durant dt.

- Produire : $\beta_u > 0$
- Détruire : $\beta_u < 0$

4e) $b_v < 0$ si $v$ est un inhibiteur, c.à.d. que sa présence entraîne une consommation de l'espèce $u$.

4.f) Soit $u(x,t) = u_0\, e^{\alpha t} \sin(kx)$

• $\dfrac{\partial u(x,t)}{\partial t} = \alpha\, u_0\, e^{\alpha t} \sin(kx) = \alpha\, u(x,t)$

$$\sin(kx) \xrightarrow{\frac{\partial}{\partial x}} k\cos(kx)$$

• $\dfrac{\partial u}{\partial x}(x,t) = u_0\, e^{\alpha t}\, k\cos(kx)$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t) = u_0\, e^{\alpha t}\, \boxed{k\, \frac{\partial}{\partial x}(\cos kx)}$$

$$= u_0\, e^{\alpha t}\, \boxed{(-)k^2 \sin(kx)}$$

$$= -k^2\, u(x,t)$$

idem pour $v(x,t)$ $\quad \dfrac{\partial v}{\partial t}(x,t) = \alpha\, v(x,t)$

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} v(x,t) = -k^2\, v(x,t)$$

Si on injecte $u(x,t)$ et $v(x,t)$ dans $\dfrac{\partial u}{\partial t} = b_u u + b_v v + D_u \dfrac{\partial^2}{\partial x^2} u$

On obtient

$$\alpha\, u_0\, \cancel{e^{\alpha t}}\, \cancel{\sin(kx)} = b_u\, u_0\, \cancel{e^{\alpha t}}\, \cancel{\sin(kx)} + b_v\, v_0\, \cancel{e^{\alpha t}}\, \cancel{\sin(kx)} - k^2 u_0\, \cancel{e^{\alpha t}}\, \cancel{\sin(kx)}\, D_u$$

soit $\boxed{\alpha\, u_0 = b_u\, u_0 + b_v\, v_0 - k^2 u_0 D_u}$

de même avec $\dfrac{\partial v}{\partial t} = g_u u + g_v v + D_v \dfrac{\partial^2}{\partial x^2} v$

On obtient $\boxed{\alpha\, v_0 = g_u\, u_0 + g_v\, v_0 - k^2 v_0 D_v}$

4g) Il faut $\alpha > 0$ pour que $e^{\alpha t}$ croisse avec le temps.

Pour les composantes $k$ tel que $\alpha < 0$, $e^{\alpha t}$ tendra vers 0 et cette composante disparaitra.

5) a) $G(t) \longrightarrow 0$ signifie une perte de corrélation. Cela signifie qu'au bout d'un certain temps (dans la figure $\sim$ 20 ms) le signal mesuré à l'instant $t$ (ici pour $t > 20$ ms) n'est plus influencé par le signal mesuré au temps $t = 0$.

Dans le cas de cette expérience, la corrélation est dû au fait que l'on regarde une assemblée d'émetteurs provenant d'une zone (boîte focale) de dimension $w$.

Avec le temps, ces émetteurs sortent par diffusion de la boîte focale, et sont remplacés par d'autres émetteurs. La perte de corrélation est la conséquence de ce renouvellement.

La décroissance de $G(t)$ avec le temps est donc une conséquence de la diffusion

5 b) Il est donc logique de retrouver dans l'expression de $G(t)$, le rapport $\frac{Dt}{w^2}$

MSD des émetteurs liées à la diffusion

dimenssion (ou carré) de la boîte focale.

si $Dt \gg w^2$, les émetteurs ont eu le temps de sortir par diffusion et $G(t) \longrightarrow 0$.