Chapitre 5 : Probabilités discrètes

I Espace de probabilité discret.

Un univers Ω est dit discret s'il est au plus dénombrable.

Définition : une probabilité $\mathbb{P}$ sur un univers Ω discret est une application

$$\mathbb{P} : \begin{array}{ccc} \mathcal{P}(\Omega) & \longrightarrow & [0,1] \\ A & \longmapsto & \mathbb{P}(A) \end{array}$$

satisfaisant

* $\mathbb{P}(\Omega) = 1$
* pour toute famille $(A_i)_{i\in I}$ d'événements deux à deux disjoints, où I est fini ou dénombrable, on a

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{i\in I} A_i \right) = \sum_{i\in I} \mathbb{P}(A_i)$$

Comme dans le cas fini, définir une probabilité $\mathbb{P}$ sur Ω discret revient à considérer une famille de poids $\left(p_\omega = \mathbb{P}(\{\omega\})\right)_{\omega\in\Omega}$ satisfaisant $p_\omega \geq 0$ pour tout $\omega \in \Omega$ et $\displaystyle\sum_{\omega\in\Omega} p_\omega = 1$.

somme infinie
si Ω de cardinal infini

Dans ce cas, pour tout évènement A,

$$\mathbb{P}(A) = \sum_{\omega\in A} p_\omega$$

somme infinie
si A de cardinal infini.

Exemple: $\Omega = \mathbb{N}^*$, $p_n = \frac{1}{2^n}$ pour tout $n\in\mathbb{N}^*$.
On a bien $p_n \geq 0$ pour tout $n\in\mathbb{N}^*$ et

$$\sum_{n\in\mathbb{N}^*} p_n = \sum_{n=1}^{+\infty} p_n = \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{2^k} = \frac{1}{2}\,\frac{1}{1-1/2} = 1.$$