Chapitre 4 : Dénombrabilité et sommation.

I Ensembles dénombrables.

Définition. Un ensemble Ω est dit dénombrable s'il est en bijection avec $\mathbb{N}$.
Un ensemble est dit au plus dénombrable s'il est fini ou dénombrable.

Proposition : Un ensemble Ω est au plus dénombrable si et seulement si il existe une surjection $f : \mathbb{N} \to \Omega$, ce qui équivaut à l'existence d'une suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de Ω telle que $\Omega = \{a_n : n \in \mathbb{N}\}$.

Preuve :
($\Rightarrow$) * Si Ω est fini de cardinal N, constitué des éléments $a_1, \dots, a_N$, il suffit de définir $a_n = a_N$ pour tout $n \geqslant N$.

* Si Ω est dénombrable il existe une bijection $\varphi : \mathbb{N} \to \Omega$. Il suffit de définir $a_n = \varphi(n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

($\Leftarrow$) * Si $\Omega = \{a_n : n \in \mathbb{N}\}$ est fini on a bien Ω au plus dénombrable.

* Si $\Omega = \{a_n : n \in \mathbb{N}\}$ est infini on définit, pour pour tout $a \in \Omega$, $n_a = \min\{n \in \mathbb{N} : a_n = a\}$, et $\mathbb{N}_\Omega = \{n_a : a \in \Omega\}$. Ω est en bijection avec $\mathbb{N}_\Omega$, et l'application $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}_\Omega$ définie par

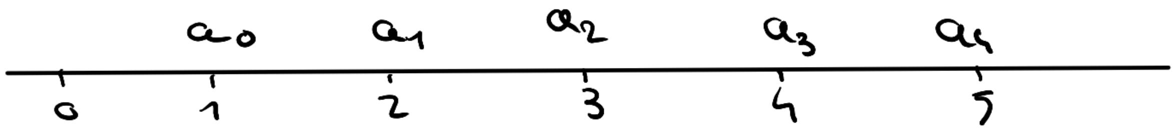
$$\begin{cases} \varphi(0) = \min(\mathbb{N}_\Omega) \\ \varphi(n+1) = \min\left(\mathbb{N}_\Omega \setminus \{\varphi(0), \dots, \varphi(n)\}\right), \quad n \geq 0 \end{cases}$$

est bijective. Donc Ω est en bijection avec $\mathbb{N}$, Ω est dénombrable.

Exemples: * $\mathbb{N}^*$ est dénombrable

$$\phi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}^*, \quad n \mapsto n+1$$ est bijective de réciproque

$$\phi^{-1} : \mathbb{N}^* \to \mathbb{N}, \quad k \mapsto k-1$$



$$\mathbb{N}^* = \{a_n : n \in \mathbb{N}\}$$

* $\mathbb{Z}$ est dénombrable.

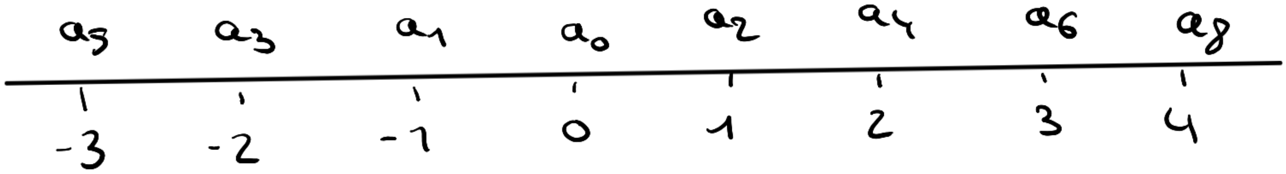
$$\phi : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$$

$$n \longmapsto \begin{cases} \frac{n}{2} & \text{si } n \text{ pair} \\ -\frac{n+1}{2} & \text{si } n \text{ impair} \end{cases}$$

est bijective de réciproque

$$\phi^{-1} : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{N}$$

$$k \longmapsto \begin{cases} 2k & \text{si } k \geq 0 \\ -2k-1 & \text{si } k < 0 \end{cases}$$



$$\mathbb{Z} = \{a_n : n \in \mathbb{N}\}.$$