# Chapitre 6 Inégalités et Théorèmes Limites

## I Inégalités de Markov et Bienaymé-Tchebychev.

Théorème (Inégalité de Markov). Soit $(\Omega, \mathbb{P})$ un espace de probabilité discret et $X : \Omega \to \mathbb{R}$ une v.a aléatoire à valeurs positives admettant une espérance. Alors pour tout réel $\lambda > 0$ on a

$$\mathbb{P}(X \geq \lambda) \leq \frac{\mathbb{E}[X]}{\lambda}.$$

Preuve :

On a, en notant $E$ l'ensemble des valeurs possible de $X$ ($E$ est une partie discrète de $\mathbb{R}_+$),

$$\mathbb{E}[X] = \sum_{x \in E} x\, \mathbb{P}(X = x)$$

$$= \sum_{\substack{x \in E \\ x \geq \lambda}} \underbrace{x}_{\geq \lambda} \mathbb{P}(X = x) + \sum_{\substack{x \in E \\ x < \lambda}} \underbrace{x\, \mathbb{P}(X = x)}_{\geq 0}$$

$$\geq \lambda \underbrace{\sum_{\substack{x \in E \\ x \geq \lambda}} \mathbb{P}(X = x)}_{= \mathbb{P}(X \geq \lambda)} + 0$$

$$\geq \lambda\, \mathbb{P}(X \geq \lambda).$$

On obtient bien

$$\mathbb{P}(X \geq \lambda) \leq \frac{\mathbb{E}[X]}{\lambda}.$$

Théorème (Inégalité de Bienaymé-Tchebychev)

Soit $(\Omega, P)$ un espace de probabilité discret et $X : \Omega \to \mathbb{R}$ une v.a. admettant un moment d'ordre 2. Alors pour tout $\lambda > 0$ on a

$$\mathbb{P}\left(|X - \mathbb{E}[X]| \geq \lambda\right) \leq \frac{Var(X)}{\lambda^2}.$$

Rq : il s'agit d'un exemple d'inégalité de concentration (quantifie la concentration de $X$ autour de son espérance).

Preuve :

Par hypothèse, la v.a. $(X - \mathbb{E}[X])^2$ est à valeurs positives et intégrable, et

$$\mathbb{P}(|X - \mathbb{E}[X]| \geq \lambda) = P(|X - \mathbb{E}[X]|^2 \geq \lambda^2)$$

$$\underset{\text{Markov}}{\leq} \frac{\mathbb{E}[(X - \mathbb{E}[X])^2]}{\lambda^2} \leq \frac{Var(X)}{\lambda^2}.$$

## II Loi faible des grands nombres.

**Théorème** (loi faible des grands nombres)
Soient $(\Omega, P)$ un espace de probabilité discret, un entier $n \geq 1$ et $X_1, \dots, X_n$ des v.a définies sur $\Omega$, indépendantes et identiquement distribuées (i.i.d.) admettant un moment d'ordre 2. On note $\mu$ leur espérance et $\sigma^2$ leur variance. Alors pour tout $\varepsilon > 0$

$$P\left( \left| \frac{X_1 + \dots + X_n}{n} - \mu \right| > \varepsilon \right) \leq \underbrace{\frac{\sigma^2}{n\varepsilon^2}}_{\xrightarrow[n \to +\infty]{} 0.}$$

Preuve.

On remarque que

$$\mathbb{E}\left[ \frac{X_1 + \dots + X_n}{n} \right] = \frac{\mathbb{E}[X_1] + \dots + \mathbb{E}[X_n]}{n} = \frac{n\mu}{n} = \mu$$

et que, puisque $X_1, \dots, X_n$ sont indépendantes,

$$\mathrm{Var}\left(\frac{X_1 + \dots + X_n}{n}\right) = \frac{1}{n^2} \mathrm{Var}(X_1 + \dots + X_n)$$

$$= \frac{1}{n^2}\left(\mathrm{Var}(X_1) + \dots + \mathrm{Var}(X_n)\right)$$

$$= \frac{n\sigma^2}{n^2}$$

$$= \frac{\sigma^2}{n}.$$

On applique l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev :

$$\mathbb{P}\left(\left|\frac{X_1 + \dots + X_n}{n} - \mu\right| \geq \lambda\right)$$

$$= \mathbb{P}\left(\left|\frac{X_1 + \dots + X_n}{n} - \mathbb{E}\left[\frac{X_1 + \dots + X_n}{n}\right]\right| \geq \lambda\right)$$

$$\leq \frac{\mathrm{Var}\left(\frac{X_1 + \dots + X_n}{n}\right)}{\lambda^2}$$

$$\leq \frac{\sigma^2}{n\lambda^2}.$$

Exemple : on lance une pièce $n$ fois,

$$X_i = \begin{cases} 1 & \text{si on obtient "face" au } i^{\text{ème}} \text{ lancer} \\ 0 & \text{si on obtient "pile" au } i^{\text{ème}} \text{ lancer} \end{cases}.$$

les v.a. $X_1, \dots, X_n$ sont iid, de loi $\mathcal{B}(\frac{1}{2})$.

Avec les notations précédentes, $\mu = \frac{1}{2}$, $\sigma^2 = \frac{1}{2}(1 - \frac{1}{2}) = \frac{1}{4}$

On pose $S_n = X_1 + \dots + X_n$ qui donne le nombre de "face" obtenus ($S_n \sim \mathcal{B}(n,p)$).

On a

$$P\left( \left| \frac{S_n}{n} - \frac{1}{2} \right| > \varepsilon \right) \leq \frac{1}{4n\varepsilon^2} \xrightarrow[n \to \infty]{} 0.$$

## III Théorème de Moivre Laplace et théorème central limite.

On a montré dans la partie II que si $X_1, \dots, X_n$ sont i.i.d de loi $\mathcal{B}(p)$ et $S_n = X_1 + \dots + X_n \sim \mathcal{B}(n,p)$, pour tout $\lambda > 0$ on a

$$\mathbb{P}\left(-\lambda \leq \frac{S_n}{n} - \underbrace{p}_{\mathbb{E}[X_1]} \leq \lambda\right) = 1 - \mathbb{P}\left(\left|\frac{S_n}{n} - p\right| > \lambda\right) \xrightarrow[n \to +\infty]{} 1.$$

Le théorème suivant donne un encadrement plus précis de $\frac{S_n}{n} - p$.

## Théorème (Moivre-Laplace)

Soient $p \in [0,1]$, $S_n \in \mathcal{B}(n,p)$ $(n \geq 1)$

et $a, b \in \mathbb{R}$ avec $a \leq b$. Alors

espérance de $X_1$.

$$\mathbb{P}\left( a \leq \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{p(1-p)}} \left( \frac{S_n}{n} - p \right) \leq b \right)$$

écart type de $X_1$

$$\xrightarrow[n \to +\infty]{} \int_a^b \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2} \, dx$$

Rq : la fonction $x \longmapsto \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}$ s'appelle densité gaussienne. Elle est intégrable sur $\mathbb{R}$ et vérifie

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2} \, dx = 1.$$

• une v.a. $X$ est dite suivre la loi gaussienne standard sur $\mathbb{R}$ si pour tous $a, b \in \mathbb{R}$ avec $a \leq b$,

$$\mathbb{P}(a \leq X \leq b) = \int_a^b \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2} dx.$$

(plus de détails en L3).

Le théorème de Moivre Laplace est un cas particulier du théorème central limite.

**Théorème** (Théorème central limite, TCL)

Soient $X_1, \dots, X_n$ des v.a. définies sur un espace de probabilité discret $(\Omega, P)$ indépendantes et de même loi, et admettant un moment d'ordre 2. On pose $\mu = \mathbb{E}[X_1]$ et $\sigma = \sqrt{Var(X_1)}$. Alors pour tous réels $a, b$ avec $a \leq b$ on a

$$\mathbb{P}\left(a \leq \frac{\sqrt{n}}{\sigma}\left(\frac{X_1 + \dots + X_n}{n} - \mu\right) \leq b\right) \xrightarrow[n \to +\infty]{} \int_a^b \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2} \, dx .$$